

**Université de Montréal**

**Concentration des fonctions propres de Steklov  
sur les composantes connexes de la frontière**

par

**Joanie Martineau**

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en mathématiques

23 septembre 2017



**Université de Montréal**

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Concentration des fonctions propres de Steklov  
sur les composantes connexes de la frontière**

présenté par

**Joanie Martineau**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Octavian Cornea*

---

(président-rapporteur)

*Iosif Polterovich*

---

(directeur de recherche)

*Dimitrix Koukouloupoulos*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le

*12 septembre 2017*

---



# SOMMAIRE

---

L'opérateur de Steklov est un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre 1. Il est connu que les valeurs propres de Steklov d'une surface ne dépendent asymptotiquement que des longueurs des composantes connexes de la frontière. Dans ce mémoire, on montre qu'asymptotiquement, les fonctions propres de Steklov ne se concentrent que sur une composante connexe de la frontière si aucun des rapports entre les longueurs des composantes de la frontière n'est finement approximable par une suite rationnelle.

Mots-clés : Pseudo-différentiel, Spectre, Steklov, Concentration, Frontière.



# SUMMARY

---

The Steklov operator on a Riemannian manifold with boundary is an elliptic pseudodifferential operator of order one. It is known that the asymptotics of the Steklov spectrum of a surface is determined, up to a very small error, by the lengths of the connected components of the boundary. In this thesis, we focus on the asymptotic properties of Steklov eigenfunctions on surfaces. In particular, we show that if all the ratios between the lengths of the connected components of the boundary are irrational numbers not admitting fast approximation by rationals, then each high energy eigenfunction concentrates along a single boundary component.

Keywords : Pseudodifferential, Spectrum, Steklov, Concentration, Boundary.





# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Sommaire</b> .....	v
<b>Summary</b> .....	vii
<b>Liste des figures</b> .....	xi
<b>Remerciements</b> .....	1
<b>Introduction</b> .....	3
<b>Chapitre 1. Les opérateurs pseudo-différentiels</b> .....	9
1.1. Transformée de Fourier .....	9
1.2. Définition des opérateurs pseudo-différentiels .....	10
1.2.1. Représentation par un noyau .....	11
1.3. Propriétés des opérateurs pseudo-différentiels .....	12
1.3.1. Composition d'opérateurs pseudo-différentiels .....	12
1.3.2. Action sur les espaces de Sobolev .....	13
1.3.3. Ellipticité et paramétrices .....	15
1.4. Opérateurs sur des variétés riemanniennes compactes .....	17
1.4.1. Opérateur elliptique sur une variété compacte .....	19
<b>Chapitre 2. Propriétés de l'opérateur de Steklov</b> .....	23
2.1. Opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1 .....	23
2.2. Opérateur elliptique et autoadjoint .....	26
2.3. Spectre discret et positif .....	26
2.4. Décomposition de l'opérateur de Steklov .....	27
2.4.1. Décomposition du Laplacien .....	27
2.4.2. Symbole de l'opérateur de Steklov .....	30
<b>Chapitre 3. Exemples de spectres</b> .....	33

3.1. Boule de dimension $N$ .....	33
3.2. Anneau.....	35
3.3. Cylindre.....	40
3.4. Simulations numériques.....	41
3.4.1. Discrétisation du problème .....	41
3.4.2. Forme variationnelle.....	42
3.4.3. Transformations conformes .....	42
3.4.4. Exemples.....	43
<b>Chapitre 4. Preuves des théorèmes 1 et 3 .....</b>	<b>47</b>
4.1. Lemmes importants .....	48
4.2. Preuve du théorème 1 .....	50
4.3. Preuve du théorème 3 .....	51
<b>Bibliographie.....</b>	<b>55</b>

## LISTE DES FIGURES

---

0.1	Courbes de niveau des fonctions propres de l'anneau . . . . .	5
0.2	Courbes de niveau des fonctions propres du cylindre . . . . .	6
3.1	Triangulation du cercle avec 50 points sur la frontière $[\mathbf{H}]$ . . . . .	41
3.2	Courbes de niveau de fonctions propres de Steklov . . . . .	45
4.1	Surfaces identiques dans un voisinage des frontières . . . . .	47
4.2	Construction de la surface $N$ . . . . .	50



# REMERCIEMENTS

---

Je tiens particulièrement à remercier mon directeur de recherche, Iosif Polterovich, pour le temps qu'il a consacré à mes questions et mes résultats. Cela est très apprécié d'avoir un directeur présent et Iosif a été à la hauteur, et ce, malgré le grand nombre d'étudiants qu'il supervise.

Je voudrais aussi remercier mes collègues étudiants du département, principalement mes collègues de l'Association étudiante pour avoir mis de la vie au département. Mention spéciale pour Jean Lagacé pour les moments passés à discuter de mathématiques, je te souhaite bonne chance dans ta carrière de mathématicien.

Finalement, je voudrais aussi remercier mes amis, ma famille et mon copain Philippe qui, malgré que les mathématiques sont très loin de leurs champs d'intérêt, ont pris de temps de m'écouter, de m'aider (surtout en français) et de m'apporter du support moral.



# INTRODUCTION

---

L'une des premières fois où on voit apparaître les fonctions propres de Steklov est dans la note *Sur l'existence des fonctions fondamentales* de Vladmir Steklov publiée en 1899 dans les Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences :

*Il existe une infinité de nombres positifs  $k_s$  et des fonctions harmoniques  $V_s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ), satisfaisant aux conditions*

$$\frac{\partial V_s}{\partial n} = k_s \phi V_s \text{ sur } (s), \quad \int \phi V_s^2 ds = 1 \quad (s = 1, 2, \dots)$$

*pour toute surface  $(s)$ , pourvu que le théorème fondamental lui soit applicable [...] où  $\phi$  est une fonction positive ne s'annulant pas sur  $(s)$ .*

*L'existence des fonctions fondamentales de M. Le Roy est donc démontrée. [S]*

Ces fonctions  $V_s$  appelées *solutions fondamentales* sont connues aujourd'hui sous le nom de fonctions propres. Steklov a continué d'étudier de nombreuses questions physiques concernant ces solutions fondamentales. Beaucoup de ses travaux et résultats sur le sujet seront ensuite publiés, notamment l'article *Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique* (1902) [S2]. C'est dans cet article que R. Weinstock aurait trouvé le problème spectral ci-haut qu'il a nommé le problème de Steklov[K].

Le problème de Steklov est encore étudié de nos jours : il y existe de nombreuses applications. Un exemple d'application est la tomographie d'impédance électrique, une technique d'imagerie médicale qui permet de visualiser la distribution de conductivité électrique d'une partie du corps. On essaie de trouver la distribution du potentiel à l'intérieur du corps en ne connaissant que la distribution du potentiel sur la peau[U]. C'est un problème inverse de Steklov : en connaissance du spectre, comment reconstruire la distribution de la densité de la variété. Une autre application possible est la modélisation des fluides. Sous

certaines hypothèses, calculer les fréquences d'oscillation d'un liquide en mouvement, revient à déterminer les valeurs propres de Steklov[**K**]. C'est d'ailleurs ce que les auteurs Mayer et Krechetnikov expliquent dans leur article *Walking with coffee : Why does it spill*, l'article qui leur obtiendra un Ig Nobel en 2012.

Plus formellement, on définit le problème de Steklov comme suit. Soit  $(M, g)$  variété riemannienne compacte de dimension  $n$  avec une frontière  $\partial M$  lisse. Le spectre de Steklov d'une variété est l'ensemble des valeurs propres  $\lambda$  tel qu'il existe une fonction propre non triviale  $u_\lambda \in C^\infty(M)$  qui respecte les propriétés suivantes

$$\begin{cases} \Delta_g u_\lambda(x) = 0 & x \in M \\ \partial_\nu u_\lambda(x) = \lambda u_\lambda(x) & x \in \partial M \end{cases}$$

où  $\partial_\nu$  désigne la dérivée normale orientée vers l'extérieur par rapport à la frontière.

L'étude des propriétés des fonctions et des valeurs propres de Steklov est souvent faite via l'opérateur de Steklov<sup>1</sup>. Pour une variété riemannienne  $(M, g)$ , l'opérateur de Steklov est défini comme suit :

$$\begin{aligned} P : C^\infty(\partial M) &\rightarrow C^\infty(\partial M) \\ f &\mapsto \partial_\nu(H_f) \end{aligned}$$

où  $H_f$  est l'extension harmonique sur  $M$  de  $f$ .

L'extension harmonique existe et est unique pour toute variété  $M$  compacte et toute fonction définie sur sa frontière  $f \in H^{1/2}(\partial M)$  [**T**]. C'est la solution au problème de Dirichlet  $\Delta u = 0$  et  $u|_{\partial M} = f$ .

Remarquons que les valeurs et fonctions propres de l'opérateur de Steklov sont celles du spectre de Steklov. Les fonctions propres de Steklov peuvent être vues comme une fonction de la frontière  $\partial M$  ou comme une fonction harmonique de la variété  $M$ . Puisqu'il n'existe qu'une unique extension harmonique, ces deux concepts sont équivalents.

Ce mémoire étudie le comportement des fonctions et des valeurs propres de Steklov pour une surface riemannienne dont la frontière n'est pas connexe. Il a

---

1. En anglais, l'opérateur de Steklov est souvent appelé l'opérateur «Dirichlet-to-Neumann» ou simplement l'opérateur de Neumann



été montré en 2014 dans [GPPS] le théorème suivant.

**Théorème 1.** [GPPS] *Soit  $M$  une surface riemannienne bornée avec une frontière lisse composée de  $K$  composantes connexes respectivement de longueur  $\ell_1, \dots, \ell_K$ . Alors les valeurs propres de Steklov de  $M$  satisfont de manière asymptotique à*

$$\lambda_j = \left\{ S\left(\frac{2\pi}{\ell_1}, \frac{2\pi}{\ell_2}, \dots, \frac{2\pi}{\ell_K}\right) \right\}_j + \mathcal{O}(j^{-\infty})$$

où l'ensemble  $S(a_1, a_2, \dots, a_n) = S(a_1) \cup \dots \cup S(a_n)$  avec l'union où on garde les multiplicités et avec  $S(a) = \{a | m| : m \in \mathbb{Z}\}$ .

Ce théorème montre qu'asymptotiquement, les valeurs propres ne dépendent que des longueurs des composantes connexes de la frontière. Pour ce qui est des fonctions propres, il est connu qu'elles se concentrent autour de la frontière, c'est-à-dire qu'elles ont une décroissance rapide à l'intérieur de la surface [GT]. Pour de nombreuses surfaces, on remarque que elles se concentrent sur une seule des composantes connexes de la frontière. C'est le cas pour l'anneau.

**Théorème 2.** *Soit  $M \subset \mathbb{R}^2$  un anneau unité percé d'un disque de rayon  $a$ . Soit la frontière  $\partial M = \partial M_a \cup \partial M_1$ , où  $\partial M_a$  est un cercle de rayon  $a$  et  $\partial M_1$  est le cercle unité. Alors les fonctions propres de Steklov  $u_\lambda$  normalisées ( $\|u_\lambda\|_{L^2(\partial M)} = 1$ ) sont telles que*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\|u_\lambda\|_{L^2(\partial M_a)} - 1)(\|u_\lambda\|_{L^2(\partial M_1)} - 1) = 0$$

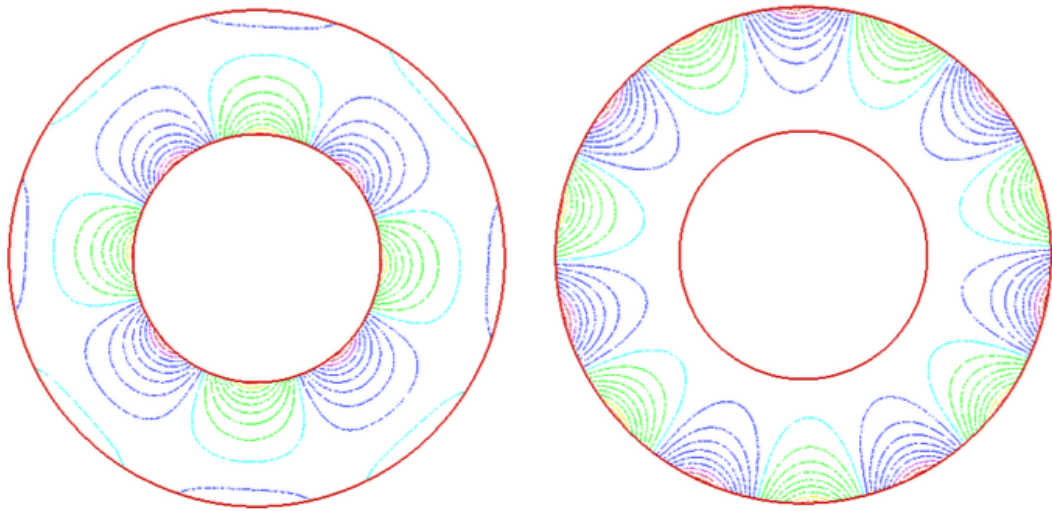


FIGURE 0.1. Courbes de niveau des fonctions propres de l'anneau

Pour un anneau formé par des cercles de rayon  $1/2$  et  $1$ , la figure 1 présente les courbes de niveau de deux fonctions propres. On voit qu'effectivement les fonctions propres sont concentrées autour d'une seule composante de la frontière.

Cependant, il existe des surfaces connexes ayant des fonctions propres qui ne se concentrent pas seulement sur une composante de la frontière. Par exemple, les fonctions propres du cylindre sont toutes symétriques ou anti-symétriques. Les fonctions propres sont donc toutes concentrées également entre les deux composantes de la frontière. La figure 2 représente les courbes de niveau de deux fonctions propres du cylindre qui est représenté par un anneau avec la métrique appropriée.

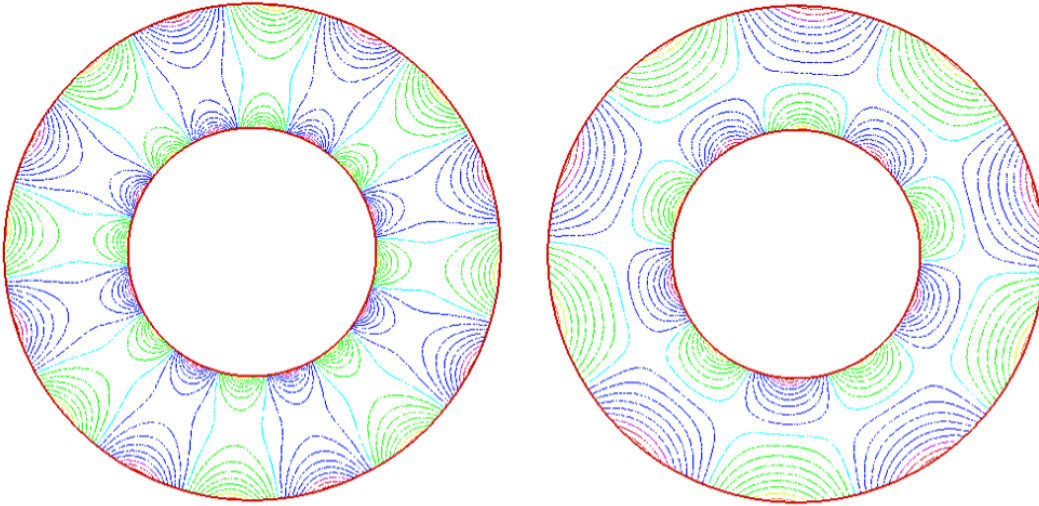


FIGURE 0.2. Courbes de niveau des fonctions propres du cylindre

**Remarque.** *Il existe des surfaces connexes bornées avec une frontière lisse ayant des fonctions propres qui se concentrent sur plus d'une seule composante de la frontière.*

De ces deux exemples, une question se pose : quelle condition imposer à une surface pour que ses fonctions propres se concentrent sur une seule des composantes de la frontière ?

Une condition suffisante pour pouvoir décrire asymptotiquement les fonctions propres de Steklov d'une surface est que les rapports  $\ell_i/\ell_j$  entre les longueurs

$\ell_1, \dots, \ell_K$  des composantes connexes de la frontière ne soient pas *finement approximables par une suite rationnelle*.

On dit qu'un nombre  $x$  est finement approximable par une suite rationnelle si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{(q_n)^n}$$

L'ensemble des nombres finement approximables par une suite rationnelle comprend évidemment les nombres rationnels, mais aussi les nombres de Liouville.

**Théorème 3.** *Soit  $M$  une surface riemannienne ayant une frontière lisse ayant  $K$  composantes connexes,  $\partial M = \partial M_1 \cup \dots \cup \partial M_K$ . Si les longueurs des composantes connexes de la frontière  $\ell_j = |\partial M_j|$  sont telles qu'aucun des rapports  $\ell_j/\ell_i$  entre les longueurs des composantes connexes de la frontière n'est finement approximable par une suite rationnelle, alors les fonctions normalisées de Steklov  $u_n$  se concentrent autour seule d'une composante de la frontière, c'est-à-dire, pour chaque  $n$ , il existe une composante  $\partial M_{k_n}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{\lambda_n}\|_{L^2(\partial M_{k_n})} = 1$ .*

Pour montrer ces résultats, nous allons étudier l'opérateur de Steklov, un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'ordre 1. Le premier chapitre est une introduction à la théorie des opérateurs pseudo-différentiels et un rappel des propriétés qui seront utiles dans les preuves. Dans le deuxième chapitre, des propriétés spécifiques de l'opérateur de Steklov et de son spectre seront démontrées. Au troisième chapitre sont présentés des exemples de spectres et fonctions propres de Steklov. Finalement, au quatrième chapitre, les théorèmes 1 et 3 seront démontrés.



# Chapitre 1

---

## LES OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

Ce chapitre introduit les opérateurs pseudo-différentiels et présente plusieurs de leurs propriétés. L'ultime but du chapitre est de démontrer que le spectre d'un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'une variété riemannienne compacte est discret. Ce chapitre suit la présentation du livre *Partial Differential Equations II* de Michael Taylor.

### 1.1. TRANSFORMÉE DE FOURIER

Les opérateurs pseudo-différentiels sont une généralisation des opérateurs différentiels. Une façon élégante de les aborder est via l'action des opérateurs différentiels sur la transformée de Fourier. Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , sa transformée de Fourier est définie comme suit :

$$\mathcal{F}(f(x))(\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx. \quad (1.1.1)$$

Directement, on a que  $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . À partir de la transformée de Fourier d'une fonction, nous pouvons obtenir la fonction initiale via la formule d'inversion [T].

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi \quad (1.1.2)$$

si l'intégrale converge.

En prenant  $f$  et  $\hat{f}$  dans l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ <sup>1</sup>, l'espace des fonctions à décroissance rapide, on s'assure que les intégrales (1.1.1) et (1.1.2) convergent. En fait, la transformée de Fourier est même un automorphisme de l'espace de Schwartz [T]. De plus, en munissant l'espace de Schwartz de la norme induite par

---

1. L'espace de Schwartz :  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_x |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$

l'espace de fonctions  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , la transformée de Fourier est une isométrie modulo un facteur de  $(2\pi)^n$ . On appelle ce résultat l'égalité de Parseval [T],

$$(2\pi)^n \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

La transformée de Fourier a de belles propriétés lorsqu'on fait intervenir la dérivée. En effet, en dérivant l'équation (1.1.2), on obtient

$$D^\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \xi^\alpha e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi, \quad (1.1.3)$$

où  $\alpha$  est un multi-indice, c'est-à-dire  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}_0)^n$ ,  $\xi^\alpha = (\xi_1)^{\alpha_1} \dots (\xi_n)^{\alpha_n}$  et  $D^\alpha = (D_1)^{\alpha_1} \dots (D_n)^{\alpha_n}$  où  $D_j = \frac{1}{i} \partial_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ .

De façon plus générale, prenons  $A(D)$  un opérateur différentiel d'ordre  $m$ ,

$$A(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$$

où  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

De la même façon que pour l'équation 1.1.3, l'opérateur différentiel  $A(D)$  peut être représenté comme un multiplicateur de Fourier, un opérateur intégrale de la transformée de Fourier.

$$\begin{aligned} A(D)f(x) &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha f(x) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha \int e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi \\ &= \int e^{ix \cdot \xi} \left( \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha \right) \hat{f}(\xi) d\xi \\ &= \int e^{ix \cdot \xi} A(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Le polynôme de degré  $m$ ,  $A(\xi)$ , est appelé le symbole de l'opérateur  $A$ . Si le symbole n'est pas un polynôme en  $\xi$ , mais une fonction plus générale pouvant dépendre de  $\xi$  et de  $x$ , l'opérateur en résultant ne sera plus différentiel : on l'appellera *opérateur pseudo-différentiel*.

## 1.2. DÉFINITION DES OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

Tout d'abord, formalisons notre définition du symbole. Pour s'assurer que l'intégrale qui définit l'opérateur converge, le symbole doit avoir une décroissance

suffisante. On classe les types de décroissance par classe de symbole.

**Définition 1.1.** Soit  $m \in \mathbb{R}$ . On dit que le symbole  $A(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  est dans la classe  $S_{1,0}^m$  si pour tout multi-indice  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ , il existe une constante  $C_{\alpha,\beta}$  telle que pour tout  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\left| D_\xi^\alpha D_x^\beta A(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha,\beta} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-|\alpha|}{2}} = C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|}.$$

La notation  $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$  est récurrente lorsqu'on traite des définitions et des propriétés des opérateurs pseudo-différentiels. Remarquons que  $S_{1,0}^m \subset S_{1,0}^{m+\epsilon}$  pour tout  $\epsilon > 0$ .

**Définition 1.2.** Soit  $A(x, D)$  un opérateur agissant sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  comme suit

$$A(x, D)f(x) = \int e^{ix \cdot \xi} A(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

où  $A(x, \xi) \in S_{1,0}^m$ . L'opérateur  $A$  est dit pseudo-différentiel d'ordre  $m$  et on le notera  $A(x, D) \in \Psi^m$ . On notera  $\Psi^{-\infty} = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} \Psi^m$ .

De la définition, on peut montrer que ces opérateurs sont des endomorphismes de l'espace de Schwartz,

$$A(x, D) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad (1.2.1)$$

de même que des endomorphismes de l'espace des distributions tempérées<sup>2</sup>,

$$A(x, D) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \quad (1.2.2)$$

### 1.2.1. Représentation par un noyau

Ainsi, à chaque symbole est associé un opérateur pseudo-différentiel et vice-versa. Nous pouvons aussi représenter ces opérateurs par leur noyau. En effet, par le théorème de Schwartz (Schwartz kernel theorem) [T], il existe  $K_A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  tel que  $\forall u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle A(x, D)u, v \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \langle K_A, u \otimes v \rangle_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)} := \iint K_A(x, y) u(x) v(y) dx dy.$$

---

<sup>2</sup>. Espace des distributions tempérées,  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , est l'espace des formes linéaires continues sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

C'est effectivement le cas tel qu'on peut le voir dans le détail suivant.

$$\begin{aligned}\langle A(x, D)u, v \rangle &= \int \left( \int A(x, \xi) e^{ix \cdot \xi} \hat{u}(\xi) d\xi \right) v(x) dx \\ &= \iint \left( \frac{1}{(2\pi)^n} \int A(x, \xi) e^{i(x-y) \cdot \xi} d\xi \right) u(y) v(x) dy dx\end{aligned}$$

On appelle  $K_A(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int A(x, \xi) e^{i(x-y) \cdot \xi} d\xi$  le noyau de Schwartz de l'opérateur pseudo-différentiel  $A$ . Le noyau de Schwartz est continûment différentiable partout sauf sur la diagonale dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  [T2].

Remarquons que nous pouvons écrire le noyau sous la forme

$$K(x, y) = L(x, x - y) \quad (1.2.3)$$

avec  $L(x, z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int A(x, \xi) e^{iz \cdot \xi} d\xi$ .

Le noyau de Schwartz, tout comme le symbole, permet de classer notre opérateur. En effet, si  $A \in \Psi^m$ , son noyau de Schwartz satisfait à

$$|D_{xy}^\beta K_A(x, y)| \leq C_\beta |x - y|^{-n-m-|\beta|},$$

si  $m + |\beta| > -n$  [T2]. La réciproque de ce résultat est vraie sous quelques hypothèses : elles sont présentées dans la proposition qui suit.

**Proposition 1.3.** [T2] *Soit  $-n < m < 0$  et  $L \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  tel que  $L(\cdot, z) : \text{une fonction lisse de } x \text{ avec valeur dans } \mathcal{S}'_0(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ . Alors  $L(x, z)$  définit un noyau de Schwartz selon l'équation (1.2.3) d'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $m$  si et seulement si pour  $z \neq 0$ ,*

$$|D_x^\beta D_z^\gamma L(x, z)| \leq C_{\beta\gamma} |z|^{-n-m-|\gamma|}.$$

Le symbole et le noyau de Schwartz sont ainsi deux façons naturelles de caractériser notre opérateur pseudo-différentiel. Selon le contexte, il est plus simple d'utiliser une représentation ou l'autre.

## 1.3. PROPRIÉTÉS DES OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

### 1.3.1. Composition d'opérateurs pseudo-différentiels

À cause de l'équation (1.2.1), on sait que la composition de deux opérateurs pseudo-différentiels,  $A_1$  et  $A_2$ , est bien définie si on prend comme domaine l'espace



de Schwartz.

$$A_1 A_2 : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

La question naturelle qui s'en suit est de savoir si cet opérateur est lui aussi pseudo-différentiel et, le cas échéant, comment le caractériser. Le comportement de la composition de deux opérateurs sera utile dans la section 1.3.3 lorsque nous traiterons de la construction des paramétrices, l'équivalent d'un inverse pour les opérateurs pseudo-différentiels.

Commençons par introduire une notation. On notera

$$A(x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} A_{m-j}(x, \xi)$$

$$\text{si } \forall N \in \mathbb{N}_0, A(x, \xi) - \sum_{j=0}^N A_{m-j}(x, \xi) \in S_{1,0}^{m-N-1}$$

Si  $A \in \Psi^m$ , et qu'il existe  $A_m(x, \xi)$  tel que

$$A(x, \xi) - A_m(x, \xi) \in S_{1,0}^{m-1},$$

on dit que  $A_m(x, \xi)$  est le *symbole principal* de  $A$ . Certains auteurs demandent que  $A_m(x, \xi)$  soit une fonction homogène d'ordre  $m$  en  $\xi$ , mais nous n'imposerons pas cette condition pour ce mémoire. Avec cette notation, nous pouvons caractériser le symbole de la composition de deux opérateurs pseudo-différentiels.

**Proposition 1.4.** [T2] *Soit  $A_1 \in \Psi^{m_1}$  et  $A_2 \in \Psi^{m_2}$ . Alors leur composition  $Q = A_1 A_2$  est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $m_1 + m_2$  et*

$$Q(x, \xi) \sim \sum_{\alpha \geq 0} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha A_1(x, \xi) D_x^\alpha A_2(x, \xi)$$

### 1.3.2. Action sur les espaces de Sobolev

Il est possible de montrer que si  $A$  est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, alors c'est un endomorphisme de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  [T2],

$$A : L^2(\mathbb{R})^n \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n). \quad (1.3.1)$$

Il serait intéressant d'étendre ce résultat pour des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre quelconque. Pour ce faire, nous nous intéresserons aux espaces de Sobolev.

Soit  $k \in \mathbb{N}_0$ , l'espace de Sobolev  $H^k(\mathbb{R}^n)$  est défini comme suit

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n), \forall |\alpha| \leq k\}. \quad (1.3.2)$$

On peut montrer l'équivalence suivante [T],

$$u \in H^k(\mathbb{R}^n) \iff \langle \xi \rangle^k \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

ce qui nous permet de généraliser la définition (1.3.2) d'un espace de Sobolev  $H^s(\mathbb{R}^n)$  pour un  $s \in \mathbb{R}$  quelconque.

**Définition 1.5.** Soit  $s \in \mathbb{R}$ , l'espace de Sobolev  $H^s(\mathbb{R}^n)$  est défini comme suit

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \langle \xi \rangle^s \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Avec la norme  $\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|\langle \xi \rangle^s \hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ , les espaces de Sobolev sont des espaces de Hilbert. De plus,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $H^s(\mathbb{R}^n)$  pour n'importe quel  $s$  [T].

Soit l'opérateur pseudo-différentiel  $\Lambda^s \in \Psi^s$  ayant comme symbole  $\langle \xi \rangle^s$ . On peut représenter  $\Lambda^s f = \mathcal{F}^{-1}(\langle \xi \rangle^s \hat{f})$ . Il est donc clair que  $\forall r, s \in \mathbb{R}$ , on a

$$\Lambda^s \Lambda^r f(x) = \Lambda^{s+r} f(x).$$

La définition 1.5 de l'espace de Sobolev est donc équivalente à  $H^s(\mathbb{R}^n) = \Lambda^{-s} L^2(\mathbb{R}^n)$ . //

Prenons un opérateur pseudo-différentiel quelconque  $A \in \Psi^m$ . On peut le représenter comme la composition d'opérateurs  $A = \Lambda^{m-s}(\Lambda^{s-m} A \Lambda^{-s}) \Lambda^s$ . Par la proposition (1.4),  $\Lambda^{s-m} A \Lambda^{-s}$  est d'ordre 0. En utilisant l'équation (1.3.1), on obtient que

$$H^s \xrightarrow{\Lambda^s} L^2 \xrightarrow{\Lambda^{s-m} A \Lambda^{-s}} L^2 \xrightarrow{\Lambda^{m-s}} H^{s-m},$$

ce qui mène à la proposition finale de cette section.

**Proposition 1.6.** Soit  $A \in \Psi^m$  et  $s \in \mathbb{R}$ , alors

$$A : H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s-m}(\mathbb{R}^n).$$

Remarquons que si  $A \in \Psi^{-\infty}$ , alors pour  $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ ,  $Af \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$ , c'est-à-dire toutes les dérivées de  $f$  existent. À cause de cette propriété, on appelle les opérateurs de  $\Psi^{-\infty}$  des opérateurs régularisants (smoothing). Inversement, si pour un  $s \in \mathbb{R}$  donné, l'opérateur pseudo-différentiel  $A$  est tel que pour tout  $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ , on a que  $Au \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$ , alors  $A$  est régularisant [Tr].

### 1.3.3. Ellipticité et paramétrices

**Définition 1.7.** On dit que  $A \in \Psi^m$  est elliptique s'il existe un  $r < \infty$  tel que

$$|A(x, \xi)| \geq C\langle \xi \rangle^m, \quad \text{pour } |\xi| \geq r$$

De la définition, on remarque que la composition de deux opérateurs elliptiques est aussi un opérateur elliptique.

**Exemple.** Soit  $\Delta$ , l'opérateur de Laplace dans  $\mathbb{R}^n$ . Son symbole est  $|\xi|^2$ . C'est donc un opérateur pseudo-différentiel (en fait, différentiel) elliptique d'ordre 2. Si on cherche  $f$  tel que  $\Delta f = u$ , on sait que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(|x - y|)u(y)dy$$

$$\text{où } G(r) = \begin{cases} (2\pi)^{-1} \log r & n = 2 \\ \frac{r^{n-2}}{(2-n)|S_{n-1}|} & n \geq 3 \end{cases}$$

où  $|S_n|$  est le volume de  $n$ -sphère unité.

Ainsi, l'opérateur intégral  $u \mapsto \int G(|x - y|)u(y)dy$  est un opérateur inverse au Laplacien sur  $\mathbb{R}^n$ .

L'existence d'un inverse est une propriété importante des opérateurs. Ce n'est pas tous les opérateurs qui en possèdent un. Nous concentrerons notre étude sur les opérateurs elliptiques qui possèdent une *paramétrice*.

**Proposition 1.8.** Soit  $A \in \Psi^m$  un opérateur elliptique. Alors, il existe  $B \in \Psi^{-m}$  tel que

$$AB = I + R \quad BA = I + \tilde{R}$$

où  $R, \tilde{R} \in \Psi^{-\infty}$ .  $B$  est appelé la paramétrice de  $A$ .

**DÉMONSTRATION.** Nous pouvons construire explicitement la paramétrice de  $A$ . Puisque c'est un opérateur elliptique, il existe  $r$  tel que  $|A(x, \xi)^{-1}| \leq C\langle \xi \rangle^{-m}$  pour  $|\xi| \geq r$ . Soit  $f(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  une fonction qui vaut 0 si  $|\xi| \leq r$  et 1 si  $|\xi| \geq 2r$ . Directement, on a que

$$B_0(x, \xi) := f(\xi)A(x, \xi)^{-1} \in S_{1,0}^{-m}$$

Par la proposition 1.4 sur la composition d'opérateurs, on voit que

$$AB_0 = I + R_0$$

$$B_0 A = I + \tilde{R}_0$$

où les opérateurs  $R_0$  et  $\tilde{R}_0$  sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre -1.

Soit  $I - R_0 + R_0^2 - \dots \sim I + S \in \Psi^0$ , définissons

$$B = B_0(I + S),$$

alors  $B \in \Psi^{-m}$  et

$$AB = I + R, \quad R \in \Psi^{-\infty}$$

De façon analogue, on peut définir  $\tilde{B} \in \Psi^{-m}$  qui a la propriété

$$\tilde{B}A = I + \tilde{R}, \quad \tilde{R} \in \Psi^{-\infty}$$

Finalement, puisque

$$\tilde{B}(I + R) = \tilde{B}AB = (I + \tilde{R})B,$$

on a que  $\tilde{B} = B \mod \Psi^{-\infty}$ . On a donc que

$$AB = I \mod \Psi^{-\infty}$$

$$BA = I \mod \Psi^{-\infty}.$$

De plus, cette paramétrice est unique, modulo un opérateur lissant [E].  $\square$

L'ellipticité d'un opérateur implique donc l'existence d'une paramétrice. La réciproque est aussi vraie. Supposons que pour un opérateur  $A \in \Psi^m$ , il existe une paramétrice  $B$ . Nécessairement, on a que  $B \in \Psi^{-m}$  à cause de la proposition 1.4 et que  $AB - I \in \Psi^{-\infty} \subset \Psi^{-1}$  par la définition d'une paramétrice. Ainsi, il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$|A(x, \xi)B(x, \xi) - 1| \leq C \langle \xi \rangle^{-1}. \quad (1.3.3)$$

Puisque le côté droit de 1.3.3  $\rightarrow 0$  lorsque  $|\xi| \rightarrow \infty$ , il existe  $r > 0$  tel que

$$A(x, \xi)B(x, \xi) \geq \frac{1}{2} \quad \text{si } |\xi| > r.$$

Puisque  $B \in \Psi^{-m}$ , il existe  $C' > 0$  tel que  $|B(x, \xi)| \leq C' \langle \xi \rangle^{-m}$  et donc

$$|A(x, \xi)| \geq \frac{1}{2|B(x, \xi)|^{-1}} \geq C' \langle \xi \rangle^m \quad \text{si } |\xi| > r$$

$\Rightarrow A$  est elliptique.

Similairement, on peut montrer que  $B$  est aussi elliptique. On a donc que l'existence d'une paramétrice implique l'ellipticité. Cette dualité entre l'existence de paramétrice et l'ellipticité est vraiment ce qui distingue cette classe d'opérateurs.

Bien qu'elle ne soient pas un inverse, les paramétrices sont utiles pour déterminer la régularité des solutions des opérateurs. En effet, prenons encore une fois  $A \in \Psi^m$  un opérateur elliptique. On peut construire sa paramétrice  $B \in \Psi^{-m}$ . Pour  $u, f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  tel que

$$Au = f$$

on a que

$$u = Bf \mod C^\infty \quad (1.3.4)$$

Ainsi, avec le résultat de la proposition 1.6 de la section précédente sur les espaces de Sobolev, on remarque que si  $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ , on a que  $u \in H^{s+m}(\mathbb{R}^n)$ .

#### 1.4. OPÉRATEURS SUR DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES COMPACTES

Considérons maintenant des opérateurs pseudo-différentiels sur une variété riemannienne compacte au lieu de  $\mathbb{R}^n$ . Comment les définir dans ce cas ? Une variété de dimension  $n$  étant localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ , une façon naturelle de définir les opérateurs pseudo-différentiels sur une variété est de demander qu'ils soient localement transformés en opérateurs pseudo-différentiels de  $\mathbb{R}^n$ . Plus formellement, on les définit comme suit.

**Définition 1.9.** Soit  $\{U_j, V_j, \chi_j, \}$  est un atlas composé de cartes  $\chi_j : V_j \subset M \rightarrow U_j \subset \mathbb{R}^n$  de la variété compacte  $M$  et soit  $\phi_j \in C_0^\infty(V_j)$  tel que la famille  $\{\phi_j\}$  est une partition de l'unité ( $\sum_j \phi_j \equiv 1$ ). On dit que  $A$ , un opérateur linéaire défini sur  $C^\infty(M)$ , est pseudo-différentiel d'ordre  $m$  ( $A \in \Psi^m(M)$ ) si pour tout  $j, k$

$$(\chi_k)_*(\phi_k A \phi_j) \chi_j^* : C^\infty(U_j) \rightarrow C^\infty(U_k) \quad (1.4.1)$$

est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $m$  de  $\mathbb{R}^n$ , où  $(\chi_j)^*(g) = g \circ \chi_j$  et  $(\chi_j)_*g = g \circ \chi_j^{-1}$ .

Remarquons que cette définition dépend de l'atlas choisi, ce qui n'est pas idéal. Nous aimerions que si un opérateur est pseudo-différentiel pour un atlas, alors il est pseudo-différentiel pour tous les atlas. Nous avons la proposition suivante.

**Proposition 1.10.** [E] Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un difféomorphisme et  $B \in \Psi^m(\mathbb{R}^n)$ . Alors  $C$  l'opérateur définit par la formule

$$F^*(Bu) = C(F^*u), \text{ où } F^*u(x) = u(F(x))$$

est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $m$  et son symbole  $c(x, \xi)$  est tel que

$$c(x, \xi) - b(F(x), (F'(x)^{-1})^t \xi) \in S^{m-1}(\mathbb{R}^n)$$

où  $(F'(x)^{-1})^t$  est la transposée de la matrice Jacobienne de la transformation  $F$ .

Une reparamétrisation d'une variété est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ . Ainsi, par la proposition ci-haute, si un opérateur est pseudo-différentiel pour une paramétrisation, il l'est pour toute paramétrisation.

Le symbole de l'opérateur pseudo-différentiel pour une variété est localement le symbole de l'opérateur correspondant sur  $\mathbb{R}^n$ . Le symbole de  $A \in \Psi^m(M)$  est une collection de symboles définis sur les ouverts  $U_j \subset \mathbb{R}^n$ .

$$a(x, \xi) = \{a_j(x, \xi) : a_j(x, \xi) \in S^m(U_j \times \mathbb{R}^n)\}$$

On a donc la relation suivante

$$(\chi_k)_* \phi_k P \phi_j \chi_j^* = M_{\psi_k \circ \chi_k^{-1}} \text{Op}(a_j) M_{\phi_j \circ \chi_j^{-1}} \mod \Phi^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$$

où  $M_f$  dénote simplement la multiplication par  $f$ .

Finalement, le symbole est localement bien défini comme une section de  $T_x^*M$  (le fibré cotangent), c'est-à-dire une fonction lisse  $M \rightarrow T^*M$ . Un changement de coordonnées de la variété provoque une transformation de l'espace cotangent.

$$x' = F(x) \quad \xi' = (F'(x)^{-1})^t \xi.$$

Par la proposition 1.10, on a que le symbole principal est invariant sur l'espace  $T^*M$ .

Tous les résultats montrés précédemment pour des opérateurs pseudo-différentiels de  $\mathbb{R}^n$  se généralisent pour les opérateurs pseudo-différentiels de variétés compactes puisqu'ils sont localement la même chose.

### 1.4.1. Opérateur elliptique sur une variété compacte

Nous terminerons ce chapitre en discutant des valeurs propres des opérateurs pseudo-différentiels elliptiques autoadjoints d'ordre positif d'une variété compacte. Nous voulons montrer que ces opérateurs ont un spectre discret avec aucun point d'accumulation fini.

**Proposition 1.11.** [Ka] *Soit  $M$  une variété compacte et soit  $A \in \Psi^m(M)$  un opérateur elliptique avec  $m > 0$ , alors le spectre de  $A$  est composé de valeurs propres isolées toutes de multiplicité finie.*

L'étude de la résolvante est essentielle pour arriver à cette conclusion. En effet, un résultat bien connu d'analyse fonctionnelle est qu'une résolvante compacte d'un opérateur linéaire implique un spectre discret avec aucun point d'accumulation fini [Ka]. Rappelons la définition et certaines propriétés de la résolvante d'un opérateur.

**Définition 1.12.** *Soit un opérateur linéaire  $A$  défini sur un ensemble de Banach<sup>3</sup>. On appelle l'ensemble résolvant, noté  $\rho(A)$ , l'ensemble suivant*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe et est continue.}\}.$$

*Le spectre de  $A$  est le complémentaire de l'ensemble résolvant, soit  $\mathbb{C} \setminus \rho(A)$ . Pour tout  $\lambda \in \rho(A)$ , on définit la résolvante  $R_\lambda : L^2(M) \rightarrow L^2(M)$  comme suit.*

$$R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$$

S'il existe un  $\lambda \in \rho(A)$  tel que  $R_\lambda$  est un opérateur compact, alors pour tout  $\lambda \in \rho(A)$ ,  $R_\lambda$  est un opérateur compact [Ka]. On dit alors que  $A$  a une résolvante compacte. La proposition suivante présente une propriété intéressante de l'image de la résolvante.

**Proposition 1.13.** [Ts] *Une fonction  $u \in L^2(M)$  est dans l'image de  $R_\lambda$  si et seulement si  $Au \in L^2(M)$ .*

**DÉMONSTRATION.** ( $\Leftarrow$ ) Prenons  $u$  tel que  $Au \in L^2(M)$ . Ainsi,  $(A + \lambda I)u \in L^2(M)$  et puisque  $u = R_\lambda(A + \lambda I)u$ , on a que  $u$  est dans l'image de  $R_\lambda$ .

---

3. Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet par rapport à sa norme. Les espaces de Hilbert sont des espaces de Banach. Exemples :  $L^2(M)$ ,  $H^s(M)$ .

( $\Rightarrow$ ) Prenons  $u$  dans l'image of  $R_\lambda$ , c'est-à-dire  $\exists f \in L^2(M)$  tel que  $u = R_\lambda(f) \Rightarrow f = (A + \lambda I)u$ . Ainsi, on a que  $Au = f - \lambda u \in L^2(M)$ .  $\square$

Finalement, rappelons-nous du lemme de Rellich, un outil important en analyse fonctionnelle.

**Lemme 1.14** (Rellich). *Si  $M$  est un domaine borné, alors la boule unité dans  $H^s(M)$  est relativement compacte dans  $L^2(M)$ .*

Nous sommes maintenant prêts à montrer la proposition 1.11.

DÉMONSTRATION. (*Proposition 1.11*)

Prenons  $A \in \Psi^m(M)$ , un opérateur pseudo-différentiel elliptique de la variété compacte  $M$  tel que  $m > 0$ . Par la proposition 1.13, on a que l'image de la résolvante est

$$\text{Im}(R_\lambda) = \{u \in L^2(M) : Au \in L^2(M)\}$$

Puisque  $A$  est elliptique, nous pouvons construire la paramétrice  $B \in \Psi^{-m}(M)$  de  $A$ . Si  $f = Au \in L^2(M) = H^0(\mathbb{R}^n)$  alors,  $u = Bf \bmod C^\infty$ . Par la propriété (1.6) des espaces de Sobolev, on a donc que  $u \in H^m(M)$ .

$$\Rightarrow \text{Im}(R_\lambda) = H^m(M)$$

Le lemme de Rellich nous permet de conclure que la résolvante d'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $m > 0$  elliptique est compacte.  $\square$

**Corollaire 1.15.** *Soit  $M$  une variété compacte et soit  $A \in \Psi^m(M)$  un opérateur elliptique avec  $m > 0$  et autoadjoint, alors le spectre de  $A$  est réel, discret et n'a aucun point d'accumulation fini. De plus, ses fonctions propres forment une base orthonormale de  $L^2(M)$  et appartiennent tous à  $C^\infty(M)$ .*

DÉMONSTRATION. Puisque  $A$  est autoadjoint, ces valeurs propres sont nécessairement réelles car

$$\lambda \langle u, u \rangle = \langle \lambda u, u \rangle = \langle Au, u \rangle = \langle u, Au \rangle = \langle u, \lambda u \rangle = \bar{\lambda} \langle u, u \rangle$$

De plus, les fonctions propres sont orthonormales car si  $u_i$  et  $u_j$  sont deux fonctions propres associées à des valeurs propres distinctes

$$\lambda_i \langle u_i, u_j \rangle = \langle Au_i, u_j \rangle = \langle u_i, Au_j \rangle = \lambda_j \langle u_i, u_j \rangle$$



L'existence de la base orthonormale découle du Théorème de Hilbert-Schmidt [W]. En effet, puisque la résolvante est bornée, compact et autoadjointe, le théorème s'applique pour montrer l'existence d'une base orthonormée formée de fonctions propres.

Finalement, puisque  $A$  est elliptique, on peut construire sa paramétrice  $B \in \Psi^{-m}(M)$ . Par la proposition 1.6, si  $u \in L^2(M)$  est telle que  $Au = \lambda u$ , alors  $u \in H^{-\infty}(M) = C^\infty(M)$ .  $\square$



## Chapitre 2

---

### PROPRIÉTÉS DE L'OPÉRATEUR DE STEKLOV

Dans ce chapitre, en utilisant les définitions et propositions de la section précédente, nous montrerons différentes propriétés de l'opérateur de Steklov. En outre, nous verrons que c'est un opérateur pseudo-différentiel autoadjoint elliptique d'ordre 1 de la frontière de la variété  $M$  et que son symbole est exactement  $\|\xi\|$  dans le cas où  $M$  est une surface.

À la fin du chapitre précédent, nous avons remarqué que les fonctions propres d'un opérateur elliptique d'ordre positif sur une variété compacte  $M$  sont  $C^\infty(M)$ . Nous allons montrer que l'opérateur de Steklov respecte ces conditions et donc, pour simplifier la notation, nous allons considérer que des fonctions  $C^\infty$ .

#### 2.1. OPÉRATEUR PSEUDO-DIFFÉRENTIEL D'ORDRE 1

Pour montrer que l'opérateur de Steklov est un opérateur pseudo-différentiel, on utilise une technique dite par couches de potentiels (potential layers). Commençons par définir deux opérateurs intégrales  $S, N$ .

**Définition 2.1.** Soit  $E(x, y)$  la solution fondamentale de l'équation de Laplace sur une variété riemannienne ouverte compacte  $(M, g)$  de dimension  $n$  ayant une frontière lisse non-vide  $((\Delta_g)_x E(x, y) = \delta_y(x))$ . On définit  $S, N : C^\infty(\partial M) \rightarrow C^\infty(\partial M)$  comme suit :

$$\begin{aligned} Sf(x) &= \int_{\partial M} f(y) E(x, y) dS(y) \quad x \in \partial M \\ Nf(x) &= 2 \int_{\partial M} f(y) \partial_{\nu_y} E(x, y) dS(y) \quad x \in \partial M \end{aligned}$$

Les fonctions de Green  $E(x, y)$ , aussi appelées solutions fondamentales, sont des fonctions continues partout sur  $M \times M$  et différentiables partout sauf sur la diagonale  $x = y$  [So]. Pour une variété de dimension  $n$ , lorsque  $y \rightarrow x$ , le terme principal de  $E(x, y)$  est

$$E(x, y) \sim \begin{cases} (2\pi)^{-1} \log \text{dist}(x, y) + \dots & n = 2 \\ (c_n)^{-1} \text{dist}(x, y)^{2-n} + \dots & n \geq 3 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

où  $c_n = (2 - n) \cdot \text{Aire}(S_{n-1})$  [T2]. Remarquons que l'opérateur  $S$  n'est pas la paramétrice du Laplacien car l'intégrale est faite sur la frontière de la variété  $M$ .

Les fonctions  $E(x, y)$  et  $2\partial_{\nu_y} E(x, y)$  sont les noyaux des opérateurs  $S$  et  $N$ . En évaluant les dérivées de ces noyaux, grâce aux propriétés sur les noyaux de Schwartz, nous pouvons montrer que ce sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre -1.

**Proposition 2.2.** [T2]  $S, N \in \Psi^{-1}(\partial M)$ .

On peut calculer le symbole d'un opérateur pseudo-différentiel  $A \in \Psi(\mathbb{R}^n)$  comme suit :

$$\begin{aligned} e^{-i\xi \cdot x} A e^{i\xi \cdot x} &= e^{-i\xi \cdot x} \int \int A(x, \eta) e^{i\eta \cdot (x-y)} e^{i\xi \cdot y} dy d\eta \\ &= \int A(x, \eta) e^{-ix \cdot (\xi - \eta)} \left( \int e^{iy \cdot (\xi - \eta)} dy \right) d\eta \\ &= \int A(x, \eta) e^{-ix \cdot (\xi - \eta)} \delta(\xi - \eta) d\eta \\ &= A(x, \xi) \end{aligned}$$

Pour calculer le symbole de  $S$ , un opérateur pseudo-différentiel de  $\partial M$ , il faut prendre des cartes pour le représenter comme un opérateur de  $\mathbb{R}^{n-1}$  autour d'un point  $x$ . Sans le faire explicitement, on obtient que le symbole principal de  $S$  est  $\frac{-1}{2\|\xi\|}$  [T2]. Il en découle que  $S$  est effectivement un opérateur pseudo-différentiel d'ordre -1. De plus, on remarque que c'est un opérateur elliptique.

Les opérateurs  $S$  et  $N$  sont importants puisqu'ils permettent une représentation par couches de potentiels de l'opérateur de Steklov.

**Proposition 2.3.** Soit  $P : C^\infty(\partial M) \rightarrow C^\infty(\partial M)$  l'opérateur de Steklov pour la variété  $M$ . Alors,

$$SP = -\frac{1}{2}(I - N). \quad (2.1.2)$$

DÉMONSTRATION. On peut étendre la définition des opérateurs  $S$  et  $N$  pour des  $x \in M$ . Soit  $S\ell, D\ell : C(\partial M) \rightarrow C(M)$  définis comme suit :

$$\begin{aligned} S\ell f(x) &= \int_{\partial M} f(y) E(x, y) dS(y) \\ D\ell f(x) &= \int_{\partial M} f(y) \partial_{\nu_y} E(x, y) dS(y) \end{aligned}$$

Soit  $x \in \partial M$ . La limite  $z \rightarrow x \in \partial M$  avec  $z \in M$  des fonctions  $S\ell f(z)$  et  $D\ell f(z)$  sont liées comme suit aux opérateurs  $S, N : C(\partial M) \rightarrow C(\partial M)$ . [T2]

$$\lim_{\substack{z \rightarrow x \\ z \in M}} S\ell f(z) = Sf(x) \quad (2.1.3)$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow x \\ z \in M}} D\ell f(z) = \frac{1}{2} (f(x) + Nf(x)) \quad (2.1.4)$$

Par la troisième identité de Green [G], on a

$$\begin{aligned} D\ell f(z) - S\ell Pf(z) &= \int_{\partial M} \partial_{\nu_y} E(z, y) f(y) - E(z, y) \partial_{\nu_y} H_f(y) dy \\ &= - \int_M E(z, y) \Delta H_f(y) dy + H_f(x) \\ &= H_f(z). \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

où  $H_f$  est l'unique extension harmonique de  $f$  sur  $M$ .

Finalement, en prenant la limite  $z \rightarrow x$  avec  $z \in M$  de l'équation (2.1.5) et en utilisant les résultats (2.1.3) et (2.1.4), on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{z \rightarrow x \\ z \in M}} S\ell Pf(z) &= \lim_{\substack{z \rightarrow x \\ z \in M}} (-H_f(z) + D\ell f(z)) \\ \Rightarrow SP &= -\frac{1}{2}(I - N) \end{aligned}$$

□

**Corollaire 2.4.** *Soit  $M$  une variété compacte avec une frontière lisse et  $P : C^\infty(\partial M) \rightarrow C^\infty(\partial M)$  l'opérateur de Steklov associé. Alors  $P \in \Psi^1(\partial M)$  et son symbole principal est  $\|\xi\|$ .*

DÉMONSTRATION. La proposition 2.3 montre que  $SP \in \Psi^0(\partial M)$ . On a donc que  $P \in \Psi^1(\partial M)$  car  $S \in \Psi^{-1}(\partial M)$ . Puisque le symbole principal de  $S$  est  $-1/2\|\xi\|$ , par la proposition 1.4 sur la composition d'opérateur pseudo-différentiel, on a que le symbole principal de  $P$  est  $\|\xi\|$ . □

Nous reviendrons sur le symbole de  $P$  dans la section 2.4.2.

## 2.2. OPÉRATEUR ELLIPTIQUE ET AUTOADJOINT

**Proposition 2.5.**  *$P$  est elliptique.*

DÉMONSTRATION. La proposition 2.3 montre que  $-2SP = I \mod \Psi^{-1}$ . À la fin de la section 1.3.3, on a montré que si un opérateur possède une paramétrice, alors l'opérateur est elliptique. La preuve suppose seulement que la composition de deux opérateurs soit  $I \mod \Psi^{-1}$ . Ainsi, cette preuve permet de montrer que  $P$  (aussi  $S$ ) est elliptique.  $\square$

**Proposition 2.6.**  *$P$  est autoadjoint.*

DÉMONSTRATION. Soit  $u, v \in C^\infty(\partial M)$ . On note respectivement  $H_u$  et  $H_v$  leur extension harmonique sur  $M$ . On utilise la première identité de Green [G].

$$\begin{aligned}
 \langle Pu, v \rangle &= \int_{\partial M} (Pu) \bar{v} \, dA = \int_{\partial M} \partial_\nu(H_u) \bar{v} \, dA \\
 &= \int_M \left( (H_{\bar{v}}) \Delta(H_u) + \nabla(H_{\bar{v}}) \cdot \nabla(H_u) \right) dV \\
 &= \int_M \nabla(H_{\bar{v}}) \cdot \nabla(H_u) \, dV \\
 &= \int_{\partial M} u \partial_\nu(H_{\bar{v}}) \, dA \\
 &= \int_{\partial M} u \partial_\nu(\overline{H_v}) \, dA = \langle u, Pv \rangle
 \end{aligned}$$

$\square$

## 2.3. SPECTRE DISCRET ET POSITIF

Ainsi, l'opérateur de Steklov d'une variété compacte est un opérateur pseudo-différentiel elliptique autoadjoint d'ordre 1. Le corollaire 1.15 s'applique et on a le résultat suivant.

**Corollaire 2.7.** *Le spectre de Steklov d'une variété riemannienne compacte est réel, discret tel que  $|\lambda_n| \rightarrow \infty$ . Les fonctions propres forment une base orthonormale de  $L^2(\partial M)$ .*

**Proposition 2.8.** *Les valeurs propres de l'opérateur de Steklov sont positives.*

DÉMONSTRATION. L'opérateur de Steklov est un opérateur défini positif.

$$\langle Pu, u \rangle = \int_M |\nabla H_u|^2 \geq 0$$

Ainsi, si  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une valeur propre,

$$Pu = \lambda u \Rightarrow \langle Pu, u \rangle = \lambda \langle u, u \rangle \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$$

□

## 2.4. DÉCOMPOSITION DE L'OPÉRATEUR DE STEKLOV

Nous avons vu précédemment que le symbole principal de l'opérateur de Steklov est  $\|\xi\|$ . En dimension 2, le symbole est exactement  $\|\xi\|$ . Ce résultat nous permettra, dans le chapitre 4, de montrer différents résultats sur les valeurs et fonctions propres de Steklov. Pour y arriver, nous commencerons par factoriser le laplacien et nous verrons que cette factorisation est liée à l'opérateur de Steklov. Les détails sont inspirés de l'article [LU].

### 2.4.1. Décomposition du Laplacien

Soit  $M$  variété ouverte de dimension  $n$  avec une frontière  $\partial M$  compacte. Nous voulons utiliser des coordonnées dites normales par rapport à la frontière. Ces dernières existent par la proposition suivante.

**Proposition 2.9.** [Mo] *Pour  $M$  une variété avec une frontière compacte, il existe  $U \subset M$  un ouvert de la frontière  $\partial M$ ,  $T > 0$  et un difféomorphisme  $\phi : U \rightarrow T \times \partial M$ , tel que*

- (1)  $\phi(p) = (p, 0)$  pour tout  $p \in \partial M$ ,
- (2) l'unique géodésique débutant à  $p \in \partial M$  de vitesse constante 1 normale à la frontière est donnée par  $t \mapsto \phi^{-1}(p, t)$ .

Ainsi, si nous avons les coordonnées  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  sur  $\partial M$ , on peut choisir, sur un voisinage de la frontière, des coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  tel que  $x_n = 0$  sur  $\partial M$  et  $x_n > 0$  sur  $M \setminus \partial M$ . De plus,  $(x_1, \dots, x_{n-1})$  est constant sur chaque géodésique de  $\overline{M}$  normales à  $\partial M$ . On a donc que  $g_{j,n} = \delta_{j,n}$ .

Ainsi, en coordonnées normales par rapport à la frontière, le tenseur métrique de  $M$  prend la forme

$$(g_{jk}(x_1, \dots, x_n)) = \begin{pmatrix} g_{jk}(x_1, \dots, x_{n-1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans ces coordonnées locales, le laplacien est donné par

$$\begin{aligned}\Delta &= \partial_n^2 + \left( \frac{\partial_n \sqrt{g}}{\sqrt{g}} \right) \partial_n + \sum_{j,k=1}^{n-1} \left( g^{jk} \partial_j \partial_k + \left( \frac{g^{jk}}{\sqrt{g}} \partial_j \sqrt{g} + \partial_j g^{jk} \right) \partial_k \right) \\ &= -D_n^2 - iE(x)D_n - Q(x, D_1, \dots, D_{n-1})\end{aligned}$$

**Proposition 2.10.** *Le laplacien en coordonnées normales de la frontière admet la factorisation suivante :*

$$-\Delta = (D_n + iE - iA)(D_n + iA) + R$$

avec  $A \in \Psi^1(\partial M \times [0, T])$ ,  $E \in \Psi^0(\partial M \times [0, T])$  et  $R \in \Psi^{-\infty}(\partial M \times [0, T])$ .

DÉMONSTRATION. Pour avoir une telle représentation, on doit avoir

$$\begin{aligned}-\Delta = D_n^2 + iED_n + Q &= (D_n + iE - iA)(D_n + iA) + R \\ &= D_n^2 + iED_n + \left( -iAD_n + iD_nA - EA + A^2 + R \right).\end{aligned}$$

On doit donc construire un opérateur pseudo-différentiel  $A$  d'ordre 1, respectant l'équation

$$Q + iAD_n - iD_nA + EA - A^2 = R \in \Psi^{-\infty}. \quad (2.4.1)$$

$Q$  est un opérateur différentiel d'ordre 2 n'ayant pas de dérivées en  $x_n$ . Cette propriété entraîne que  $A(x_n)$  est un opérateur *tangentiel* : le symbole de  $A$  n'a pas de terme en  $\xi_n$ . Ainsi, le symbole de  $A$  est de la forme

$$a(x_1, x_2, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}).$$

Ceci implique que  $A$  agit sur  $u \in C^\infty(\partial M \times [0, T])$  comme suit :  $(Au)(x_n) = A(x_n)u(x_n)$  [Mo]. La dérivation de cet opérateur suit la règle de la composition. En effet, on note  $A' = \frac{dA}{dx_n}$  l'opérateur ayant comme symbole  $\frac{\partial a}{\partial x_n}$ . La dérivée  $A'$  est un opérateur différentiel du même ordre que  $A$ . On a que  $(Au)' = A'u + A(u')$  [Mo].

Finalement, on a la propriété suivante :

$$iAD_n u - iD_n A u = \frac{d(Au)}{dx_n} - A \left( \frac{du}{dx_n} \right) = \frac{dA}{dx_n} u,$$

et cette égalité permet de conclure que l'équation (2.4.1) est équivalente à

$$Q + \frac{dA}{dx_n} + EA - A^2 = R \in \Psi^{-\infty}. \quad (2.4.2)$$



Nous connaissons les symboles de  $Q$  et de  $E$ , nous allons donc construire le symbole de  $A$ ,  $a \sim \sum_{j \leq q} a_j$ , avec  $a_j \in S^j(\partial M \times [0, T))$ . De 2.4.2, on déduit que ces  $a_j$  devront satisfaire à

$$q_2 + q_1 - \sum_{j \leq 1} \partial_n a_j + \sum_{j \leq 1} E a_j - \sum_{\substack{\alpha, |\alpha| \geq 0 \\ j, k \leq 1}} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a_j \partial_x^\alpha a_k \sim 0 \quad (2.4.3)$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad q_1 &= -i \sum_{j,k=1}^{n-1} \left( g^{jk} \frac{\partial_j \sqrt{g}}{\sqrt{g}} + \partial_j g^{jk} \right) \xi_j \\ \text{et} \quad q_2 &= \sum_{j,k=1}^{n-1} g^{jk} \xi_j \xi_k. \end{aligned}$$

Les termes de chaque ordre doivent être nuls, modulo  $r(x, \xi) \in S^{-\infty}$ . Remarquons que  $q_2$  n'a que des termes d'ordre 2, que  $q_1$  n'a que des termes de ordre 1 et que  $\partial_\xi^\alpha a_j \partial_x^\alpha a_k$  est d'ordre  $j + k - |\alpha|$ .

*Termes d'ordre 2*

$$q_2 - a_1^2$$

La fonction  $\sqrt{q_2}$  n'est pas lisse autour de  $\xi = 0$ , on n'a qu'à retirer cette portion et définir

$$a_1(x, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = -\sqrt{q_2} = -\sqrt{\sum_{j,k=1}^{n-1} g^{jk}(x) \xi_j \xi_k} \quad \text{pour } \|\xi\| \geq 1$$

Remarquons que nous aurions pu omettre le signe négatif dans l'équation ci-haut, mais ce choix nous permet de dire que le  $(A - E)$  est un opérateur elliptique, une propriété importante pour la proposition suivante. Pour  $\|\xi\| < 1$ , on étend  $a(x, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$  de façon lisse. En modifiant localement un symbole, on modifie l'opérateur que d'un opérateur régularisant.

On a bel et bien que  $a_1 \in S^1(\partial M \times [0, T))$  et  $q_2 \sim a_1^2$ . De plus, cette définition entraîne que  $a_1$  est un symbole elliptique. Sa paramétrice existe et nous la noterons  $(a_1)^{-1} \in \Psi^{-1}$ .

$$(a_1)^{-1} a_1 = 1 \quad \text{mod } \Psi^{-\infty} \quad (2.4.4)$$

*Termes d'ordre 1*

$$q_1 - \partial_n a_1 + E a_1 + \sum_{|\alpha|=1} \frac{i}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a_1 \partial_x^\alpha a_1 - 2a_0 a_1$$

Ayant démontré l'existence de  $(a_1)^{-1}$ , on obtient directement une définition pour  $a_0$ .

$$a_0 = \frac{1}{2}(a_1)^{-1} \left( q_1 - \partial_n a_1 + E a_1 + \sum_{|\alpha|=1} \frac{i}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a_1 \partial_x^\alpha a_1 \right)$$

Puisque  $(a_1)^{-1} \in \Psi^{-1}(\partial M \times [0, T])$ , on a que  $a_0 \in \Psi^0(\partial M \times [0, T])$ .

*Termes d'ordre  $m \leq 0$*

On définit les termes subséquents récursivement par rapport aux termes d'ordre plus grand. Pour  $m \leq 0$ , on a

$$-\partial_n a_m + E a_m - \sum_{\substack{m \leq j, k \leq 1 \\ |\alpha|=j+k-m}} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a_j \partial_x^\alpha a_k - 2a_{m-1} a_1$$

f et on obtient

$$a_{m-1} = \frac{1}{2}(a_1)^{-1} \left( -\partial_n a_m + E a_m - \sum_{\substack{m \leq j, k \leq 1 \\ |\alpha|=j+k-m}} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a_j \partial_x^\alpha a_k \right) \in S^{m-1}(\partial M \times [0, T])$$

Nous avons construit  $A$ , l'opérateur pseudodifférentiel ayant symbole  $\sum_{j \leq 1} a_j$ . Cet opérateur résout l'équation (2.4.2) et il est unique modulo  $\Psi^{-\infty}$ .  $\square$

L'utilité de cette factorisation du laplacien est mise en évidence par la prochaine proposition.

### 2.4.2. Symbole de l'opérateur de Steklov

**Proposition 2.11.** *Soit  $M$  une variété riemannienne compacte de dimension  $n$  avec une frontière  $\partial M$ . Soit  $P \in \Psi^1(\partial M)$  l'opérateur de Steklov et soit  $B = -A(x_n = 0)$  l'opérateur défini ci-haut. Alors*

$$P = B \mod \Psi^{-\infty}(\partial M)$$

**DÉMONSTRATION.** Nous allons montrer que si on prend une fonction  $f \in H^{1/2}(\partial M)$  alors  $(P - B)f \in C^\infty(\partial M) = H^{-\infty}(\partial M)$  et donc, par la remarque suivant la proposition (1.6), on pourra conclure que  $P - B \in \Psi^{-\infty}$ .

Soit  $f \in H^{1/2}(\partial M)$  et soit  $u$  son unique extension harmonique sur  $M$ , alors  $u \in H^1(M)$  [T]. En coordonnées normales de la frontière, on définit l'opérateur

de Steklov  $P$  comme

$$Pf = -\frac{du}{dx_n}(0) = -iD_n u(x_n = 0) \quad (2.4.5)$$

En utilisant la factorisation du Laplacien en coordonnées normales de la frontière présentée précédemment, l'équation  $\Delta u = 0$ , revient à

$$(D_n + iA)u = v \quad (2.4.6)$$

$$(D_n + iE - iA)v = -Ru \in C^\infty(\partial M \times [0, T)) \quad (2.4.7)$$

Puisque  $D_n = -i\frac{\partial}{\partial x_n}$ , l'équation (2.4.7) est

$$\frac{\partial v}{\partial x_n} + (A - E)v = iRu \in C^\infty(\partial M \times [0, T)) \quad (2.4.8)$$

Avec le choix de signe fait pour le symbole principal de  $A$ , on a que l'opérateur  $(A - E)$  est elliptique avec un symbole réel. De plus,  $A$  ne contient pas de dérivée par rapport à  $x_n$ , l'équation (2.4.8) ci-haut est en fait une équation de la chaleur généralisée. Ainsi,  $v \in C^\infty(\partial M \times [0, T))$  [Tr].

Maintenant, en prenant (2.4.6) et la définition (2.4.5) de l'opérateur de Steklov, on a que

$$P(f) = -iD_n(x_n = 0) = -(Au)(x_n = 0) - iv(x_n = 0) = B(f) - iv(x_n = 0)$$

et donc  $(P - B)f = -iv(0) \in C^\infty(\partial M)$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

**Proposition 2.12.** *Soit  $M$  une surface riemannienne. Le symbole de l'opérateur de Steklov pour la surface  $M$  est  $\|\xi\|$ .*

DÉMONSTRATION. Les deux propositions précédentes nous permettent de calculer explicitement le symbole de l'opérateur de Steklov. Pour une variété de dimension 2, en coordonnées normales de la frontière, le tenseur métrique a une propriété intéressante :

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) &= \begin{pmatrix} g_{11}(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \sqrt{g(x)} &= \sqrt{g_{11}(x)} = \frac{1}{\sqrt{g^{11}(x)}} \end{aligned}$$

$$a_1 = -\sqrt{g^{11}(x)(\xi_1)^2} = -\sqrt{g^{11}(x)}|\xi_1| = -\|\xi\| \quad \text{pour } \|\xi\| \geq 1$$

où le vecteur  $(\xi_1) = (\xi)$  est vu comme un vecteur cotangent de  $T_x^* \partial M$ . Pour  $\|\xi\| < 1$ , on étend de façon lisse le symbole. Calculons les autres  $a_j$  pour  $\|\xi\| \geq 1$ .

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}(a_1)^{-1} \left( q_1 - \partial_n a_1 + E a_1 + \sum_{|\alpha|=1} \frac{i}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a_1 \partial_x^\alpha a_1 \right) \\
&= \frac{1}{2}(a_1)^{-1} \left( -i \left( g^{11} \frac{\partial_{x_1} \sqrt{g}}{\sqrt{g}} + \partial_{x_1} g^{11}(x) \right) \xi_1 + \partial_{x_2} \sqrt{g^{11}(x)} |\xi_1| + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial_{x_2} \sqrt{g}}{\sqrt{g}} \sqrt{g^{11}(x)} |\xi_1| + i \left( \partial_{\xi_1} \sqrt{g^{11}(x)} |\xi_1| \partial_{x_1} \sqrt{g^{11}(x)} |\xi_1| \right) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Par récurrence, on peut aussi montrer que  $a_j = 0$  pour tout  $j < 0$ . Ainsi, le symbole de  $P$  est simplement  $\|\xi\|$  pour  $\|\xi\| \geq 1$ . On dit que le symbole de l'opérateur est simplement  $\|\xi\|$  car le comportement du symbole autour de  $\xi = 0$ , ne change l'opérateur en résultant que d'un opérateur régularisant.  $\square$

Cette proposition nous montre que le symbole de l'opérateur de Steklov ne dépend que de la métrique de la surface dans un voisinage de la frontière. On a donc le corollaire suivant.

**Corollaire 2.13.** *Soit  $M$  une surface riemannienne avec une frontière lisse  $\partial M$ . Soit  $N$  une surface ayant la même frontière que  $M$  et le même comportement dans un voisinage de la frontière. Alors*

$$P_M - P_N \in \Psi^{-\infty}(\partial M).$$

# Chapitre 3

---

## EXEMPLES DE SPECTRES

Dans ce chapitre seront présenter en exemple le spectre de Steklov de quelques variétés riemanniennes simples. Grâce à ces exemples, nous pourrons observer des propriétés sur le spectre de Steklov, propriétés que nous prouverons dans le chapitre 4.

### 3.1. BOULE DE DIMENSION $N$

Soit  $M$  la boule unité dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Nous cherchons les valeurs propres  $\lambda$  tel que il existe  $u \in C^\infty(M)$  satisfaisant à

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= 0 & x \in M \\ \partial_\nu u(x) &= \lambda u(x) & x \in \partial M.\end{aligned}$$

En supposant que  $u(x) = f(|x|)g\left(\frac{x}{|x|}\right) = f(r)g(\theta)$ ,  $r \geq 0$  et  $\theta \in S^n$ , on a que

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S_n} = f''(r)g(\theta) + \frac{n}{r} f'(r)g(\theta) + \frac{1}{r^2} f(r) \Delta_{S_n} g(\theta) = 0 \\ \Rightarrow r^2 \frac{f''(r)}{f(r)} + nr \frac{f'(r)}{f(r)} &= -\frac{\Delta_{S_n} g(\theta)}{g(\theta)} = C\end{aligned}$$

On obtient que  $g_k(\theta)$  sont les fonctions propres du laplacien de la  $n$ -sphère avec les valeurs propres  $C = k(k + n - 1)$  avec  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Pour  $k = 0$ , il n'y a qu'une seule fonction propre, la fonction constante. Si  $n = 1$ , tous les espaces propres pour les valeurs propres  $k > 0$  sont de dimension 2. Finalement, si  $n \geq 2$  et  $k > 0$ , l'espace propre associée à la valeur propre  $k(k + n - 1)$  est de dimension  $\binom{n+k}{n} - \binom{n+k-2}{n-2} \geq 2$ . Déterminons les fonctions  $f_k(r)$ .

Pour  $k = 0$ , on doit avoir que  $rf_0''(r) + nr f_0'(r) = 0$  si  $r \neq 0$ .

$$\Rightarrow f(r) = \begin{cases} A \log r + B & \text{si } n = 1 \\ Ar^{1-n} + B & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Cependant, puisque les fonctions propres sont  $C^\infty(M)$  et que  $\log r \rightarrow -\infty$ ,  $r^{1-n} \rightarrow -\infty$  lorsque  $r \rightarrow 0$ , on a nécessairement que  $A = 0$ . Ainsi, pour  $k = 0$ , nous avons une fonction propre constante associée à la première valeur propre  $\lambda_0 = 0$ .

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on doit avoir que  $r^2 f_k''(r) + nr f_k'(r) - k(k+n-1)f_k(r) = 0$ .

$$\Rightarrow f_k(r) = A_k r^k + B_k r^{-k}$$

Encore une fois, puisque les fonctions doivent être  $C^\infty(M)$ , on a que  $B_k = 0$ . On détermine la valeur propre avec la condition spectrale,  $f'(1) = \lambda f(1)$ .

$$k(A_k) = \lambda_k(A_k) \Rightarrow \lambda_k = k$$

On a donc que le spectre de la boule est  $\{0\} \cup \mathbb{N}$  tel que chaque valeur propre  $k$  est de même multiplicité que la valeur propre du laplacien  $k(k+n-1)$  de la  $n$ -sphère. Les fonctions propres pour  $k > 0$  sont

$$u_k(r, \theta) = A_k r^k g_k(\theta)$$

où  $g_k$  sont les fonctions propres du laplacien de la sphère  $S_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  et  $A_k$  une constante.

En particulier, pour le cas  $n = 1$ , le spectre du disque unité  $D \subset \mathbb{R}^2$  est

$$\sigma(D) = \{0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots\}$$

et les fonctions propres sont  $u_k(r, \theta) = A_k r^k e^{ik\theta}$  et  $A_k r^k e^{-ik\theta}$  avec  $A_k$  une constante de normalisation.

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié le spectre de Steklov comme étant le spectre d'un opérateur pseudo-différentiel de  $\partial M$ . Ici  $\partial M = S_1$ , alors les fonctions propres normalisées ( $\|\cdot\|_{L^2(\partial M)} = 1$ ) sont

$$u_k(x) = (2\pi)^{-1} e^{ik\theta}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si on connaît le spectre de Steklov d'une variété  $M$ ,  $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$  associé aux fonctions propres  $u_k(x)$ , alors on connaît le spectre de  $cM$  ( $c \neq 0$ ). Le spectre de  $cM$  est  $\{\frac{\lambda_k}{c} : k \in \mathbb{N}\}$ , associé aux fonctions propres  $u_k(\frac{x}{c})$ . Ainsi, la dilation d'un facteur  $c$  d'une variété entraîne la dilation d'un facteur  $\frac{1}{c}$  de son spectre.

Ainsi, les fonctions propres normalisées d'un disque de circonférence  $\ell$  sont  $\ell^{-1}e^{ik\theta}$  et le spectre de ce disque est

$$\left\{0, \frac{2\pi}{\ell}, \frac{2\pi}{\ell}, \frac{4\pi}{\ell}, \frac{4\pi}{\ell}, \frac{6\pi}{\ell}, \frac{6\pi}{\ell}, \dots\right\}.$$

### 3.2. ANNEAU

Soit  $M \subset \mathbb{R}^2$  un anneau, c'est-à-dire un disque unité troué par un disque de rayon  $a$ . Nous cherchons les valeurs propres  $\lambda$  tel qu'il existe  $u \in C^\infty(M)$  satisfaisant

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sur } M \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda u & \text{sur } \partial M. \end{cases}$$

Supposons que  $u$  est peut-être décomposé comme  $u(r, \theta) = f(r)g(\theta)$  avec  $r \in [a, 1]$  et  $\theta \in [0, 2\pi)$ , la condition  $\Delta u = 0$  est équivalente à

$$r^2 \frac{f''(r)}{f(r)} + r \frac{f'(r)}{f(r)} = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = k^2.$$

Directement, on obtient que  $g_k(\theta) = e^{\pm ik\theta}$  avec  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Déterminons les fonctions  $f_k(r)$  et les valeurs propres  $\lambda_k$ .

Pour le cas  $k = 0$ , on cherche  $f_0(r)$  tel que  $rf_0'' + f_0' = (rf_0')' = 0$ . On a que  $f_0(r) = A \log r + B$ . La dérivée normale sur les frontières doit respecter la condition de Steklov.

$$-\frac{A}{a} = \lambda_0(A \log a + B) \quad A = \lambda_0(B)$$

On obtient ainsi la valeur propre 0 associée à une fonction propre constante et la valeur propre  $\lambda_0 = -\frac{1+a}{a \log a}$  associée à la fonction propre

$$u_0(r, \theta) = A_0 \left( \log r - \frac{a \log a}{a+1} \right)$$

où  $A_0$  est une constante de normalisation.

Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on cherche  $f_k$  tel que  $r^2 f_k''(r) + r f_k'(r) - k^2 f_k(r) = 0$ . La solution est de la forme

$$f_k(r) = A_k r^k + B_k r^{-k}.$$

On détermine les coefficients  $A_k$  et  $B_k$  ainsi que la valeur propre associée à l'aide de la condition de Steklov sur les deux composantes de la frontières.

$$-A_k k a^{k-1} + B_k k a^{-k-1} = \lambda_k (A_k a^k + B_k a^{-k}) \quad A_k k - B_k k = \lambda_k (A_k + B_k)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} ka^{k-1} + \lambda_k a^k & \lambda_k a^{-k} - ka^{-k-1} \\ \lambda_k - k & k + \lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour avoir une solution non triviale, le déterminant de la matrice doit être nul. Nous allons ainsi déterminer  $\lambda_k$ .

$$\begin{aligned} \text{Det} &= (ka^{k-1} + \lambda_k a^k)(k + \lambda_k) + (k - \lambda_k)(-ka^{-k-1} + \lambda_k a^{-k}) \\ &= (\lambda_k)^2 (a^k - a^{-k}) + \lambda_k k \left( \frac{1+a}{a} \right) (a^k + a^{-k}) + k^2 (a^{k-1} - a^{-k-1}) \\ &= (a^k - a^{-k}) \left( (\lambda_k)^2 + \lambda_k k \left( \frac{(1+a)(a^k + a^{-k})}{a(a^k - a^{-k})} \right) + \frac{k^2}{a} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_k &= \left( \frac{1}{2} \right) \left[ -k \left( \frac{1+a}{a} \right) \left( \frac{a^k + a^{-k}}{a^k - a^{-k}} \right) \pm \sqrt{\left( k \left( \frac{1+a}{a} \right) \left( \frac{a^k + a^{-k}}{a^k - a^{-k}} \right) \right)^2 - \frac{4k^2}{a}} \right] \\ &= \frac{k}{2} \left( \frac{1+a}{a} \right) \left( \frac{a^k + a^{-k}}{a^{-k} - a^k} \right) \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4a(a^k - a^{-k})^2}{(1+a)^2(a^k + a^{-k})^2}} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont

$$\begin{aligned} \lambda_{1,k} &= \frac{k}{2} \left( \frac{1+a}{a} \right) \left( \frac{a^k + a^{-k}}{a^{-k} - a^k} \right) \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4a(a^k - a^{-k})^2}{(1+a)^2(a^k + a^{-k})^2}} \right) \\ \lambda_{2,k} &= \frac{k}{2} \left( \frac{1+a}{a} \right) \left( \frac{a^k + a^{-k}}{a^{-k} - a^k} \right) \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4a(a^k - a^{-k})^2}{(1+a)^2(a^k + a^{-k})^2}} \right). \end{aligned}$$

Chaque valeur propre est associées à deux fonctions propres que nous notons  $u_{j,-k}$  et  $u_{j,+k}$ , pour  $j = 1, 2$ .

$$u_{j,\pm k}(r, \theta) = C_{j,k} \left( r^k + \frac{k - \lambda_{j,k}}{k + \lambda_{j,k}} r^{-k} \right) e^{\pm i k \theta} = C_{j,k} \left( r^k + \frac{\lambda_{j,k} a^k + k a^{k-1}}{k a^{-k-1} - \lambda_{j,k} a^{-k}} r^{-k} \right) e^{\pm i k \theta}$$

où  $C_{j,k}$  est une constante de normalisation et  $k > 0$ .



De cet exemple, nous observons deux choses.

1. Les valeurs propres. Lorsque  $k$  est très grand, on a que

$$\begin{aligned}\lambda_{1,k} &\approx k \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( \frac{1+a}{a} \right) \left( \frac{a^{2k}+1}{1-a^{2k}} \right) \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4a(a^{2k}-1)^2}{(1+a)^2(a^{2k}+1)^2}} \right) \\ &= \frac{k}{2} \left( \frac{1+a}{a} \right) \left( 1 + \frac{1-a}{1+a} \right) = \frac{k}{a}\end{aligned}$$

et similairement,

$$\begin{aligned}\lambda_{2,k} &\approx k \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( \frac{1+a}{a} \right) \left( \frac{a^{2k}+1}{1-a^{2k}} \right) \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4a(a^{2k}-1)^2}{(1+a)^2(a^{2k}+1)^2}} \right) \\ &= \frac{k}{2} \left( \frac{1+a}{a} \right) \left( 1 - \frac{1-a}{1+a} \right) = k.\end{aligned}$$

Lorsque  $k \rightarrow \infty$ , les valeurs propres  $\lambda_{1,k}$  sont asymptotiquement les valeurs propres d'un disque de rayon  $a$ , alors que les valeurs propres  $\lambda_{2,k}$  se rapprochent de celles du disque unité, deux surfaces dont l'union de leur frontière est la celle de l'anneau.

Ainsi, on remarque que les valeurs propres d'une valeur sont issues de l'une ou l'autre des composantes de la frontière. Nous allons voir dans le prochain chapitre que cette propriété s'applique pour l'ensemble des surfaces riemanniennes. Cela été montré en 2014 par Polterovich, Girouard, Parnowski et Sher [**GP**PS].

2. Les fonctions propres. On note aussi  $u \in C^\infty(\partial M)$ , les restrictions des fonctions propres à la frontière de l'anneau. Étudions les normes  $L^2(\partial M)$  des fonctions propres sur les deux composantes de la frontière. On note  $\partial M_a$ , la composante de la frontière formant un cercle de rayon  $a$ .

$$\begin{aligned}\|u_{j,\pm k}\|_{L^2(\partial M_a)} &= \left( \int_{\partial M_a} \left| C_{j,k} \left( a^k + \frac{\lambda_{j,k} a^k + k a^{k-1}}{k a^{-k-1} - \lambda_{j,k} a^{-k}} a^{-k} \right) e^{\pm i k \theta} \right|^2 d\theta \right)^{1/2} \\ &= 2\pi a \left| C_{j,k} \frac{2k a^k}{k - \lambda_{j,k} a} \right| \\ \\\|u_{j,\pm k}\|_{L^2(\partial M_1)} &= \left( \int_{\partial M_1} \left| C_{j,k} \left( 1 + \frac{k - \lambda_{j,k}}{k + \lambda_{j,k}} \right) e^{\pm i k \theta} \right|^2 d\theta \right)^{1/2} \\ &= 2\pi \left| C_{j,k} \frac{2k}{k + \lambda_{j,k}} \right|\end{aligned}$$

Avec ces détails, on a que la constante de normalisation vaut

$$C_{j,k} = \left( 4\pi k \sqrt{\frac{a^{2k+2}}{(k - \lambda_{j,k}a)^2} + \frac{1}{(k + \lambda_{j,k})^2}} \right)^{-1}. \quad (3.2.1)$$

Lorsque  $k \rightarrow \infty$ , on veut connaître les normes des fonctions propres sur chaque composante de la frontière. Commençons par les fonctions propres de type  $j = 1$ .

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|u_{1,\pm k}\|_{L^2(\partial M_1)}}{4\pi|C_{1,k}|} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k + \lambda_{1,k}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 + \left( \frac{1+a}{2a} \right) \left( \frac{1+a^{2k}}{1-a^{2k}} \right) \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4a(1-a^{2k})^2}{(1+a)^2(1+a^{2k})^2}} \right) \right)^{-1} \\ &= \left( 1 + \frac{1+a}{2a} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4a}{(1+a)^2}} \right) \right)^{-1} = \frac{a}{1+a} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|u_{j,\pm k}\|_{L^2(\partial M_a)}}{4\pi a|C_{1,k}|} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{ka^k}{k - a\lambda_{1,k}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} a^k \left( 2 - (1+a) \left( \frac{1+a^{2k}}{1-a^{2k}} \right) \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4a(1-a^{2k})^2}{(1+a)^2(1+a^{2k})^2}} \right) \right)^{-1} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)(1-a^{2k})}{a^k \left( 4 + (1+a) \left( 2 + 2\sqrt{1 - \frac{4a(1-a^{2k})^2}{(1+a)^2(1+a^{2k})^2}} + \frac{8a(1-a^{2k})}{(1+a)(1+a^{2k})\sqrt{(1+a)^2(1+a^{2k})^2 - 4a(1-a^{2k})^2}} \right) \right)} \\ &= \frac{1}{0^+ \left( -4 - (1+a) \left( 2 + 2 \left( \frac{1-a}{1+a} \right) + \frac{8a}{1-a} \right) \right)} = -\infty \end{aligned}$$

où la seconde égalité découle du théorème de l'Hospital. De l'égalité 3.2.1 et des détails ci-haut, on a que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C_{1,k} = \left( 4\pi \sqrt{\left( a^2 \frac{ka^k}{k - \lambda_{1,k}a} \right)^2 + \left( \frac{k}{k + \lambda_{1,k}} \right)^2} \right)^{-1} = 0.$$

Nous pouvons donc calculer les limites des normes des fonctions propres sur chacune des composantes connexes de la frontière.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \|u_{1,\pm k}\|_{L^2(\partial M_1)} &= 2\pi \left| C_{1,k} \frac{2k}{k + \lambda_{1,k}} \right| \rightarrow 0 \\ \|u_{1,\pm k}\|_{L^2(\partial M_a)} &= 2\pi a \left| C_{1,k} \frac{2ka^k}{k - \lambda_{1,k}a} \right| \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Nous pouvons faire le même exercice pour les fonctions propres de type  $j = 2$ .

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|u_{2,\pm k}\|_{L^2(\partial M_1)}}{4\pi|C_{2,k}|} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k + \lambda_{2,k}} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1+a}{2a} \frac{1+a^{2k}}{1-a^{2k}} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4a(1-a^{2k})^2}{(1+a)^2(1+a^{2k})^2}} \right) \right)^{-1} \\
&= \left( 1 + \frac{1+a}{2a} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4a}{(1+a)^2}} \right) \right)^{-1} = \frac{1}{2} \\
\\
\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|u_{j,\pm k}\|_{L^2(\partial M_a)}}{4\pi a|C_{j,k}|} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a^k}{k - a\lambda_{2,k}} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} a^k \left( 2 - (1+a) \left( \frac{1+a^{2k}}{1-a^{2k}} \right) \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4a(1-a^{2k})^2}{(1+a)^2(1+a^{2k})^2}} \right) \right)^{-1} \\
&= 0 \left( 2 - (1+a) \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4a}{(1+a)^2}} \right) \right)^{-1} = \frac{0}{1-a} = 0 \\
\\
\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} C_{2,k} &= \left( 4\pi \sqrt{\left( a^2 \frac{ka^k}{k - \lambda_{2,k}a} \right)^2 + \left( \frac{k}{k + \lambda_{2,k}} \right)^2} \right)^{-1} \\
&= \left( 4\pi \sqrt{0 + \frac{1}{4}} \right)^{-1} = \frac{1}{2\pi} \\
\\
\Rightarrow \|u_{2,\pm k}\|_{L^2(\partial M_1)} &= 2\pi \left| C_{2,k} \frac{2k}{k + \lambda_{2,k}} \right| \rightarrow 1 \\
\|u_{2,\pm k}\|_{L^2(\partial M_a)} &= 2\pi a \left| C_{2,k} \frac{2ka^k}{k - \lambda_{2,k}a} \right| \rightarrow 0
\end{aligned}$$

On remarque donc que, asymptotiquement, les fonctions propres se concentrent complètement sur l'une ou l'autre des composantes connexes de la frontière, ce qui complète la preuve du théorème 2 énoncé dans l'introduction.

**Théorème 2.** Soit  $M \subset \mathbb{R}^2$  un anneau unité percé d'un disque de rayon  $a$ . Soit la frontière  $\partial M = \partial M_a \cup \partial M_1$ , où  $\partial M_a$  est un cercle de rayon  $a$  et  $\partial M_1$  est le cercle unité. Alors les fonctions propres de Steklov  $u_\lambda$  normalisées ( $\|u_\lambda\|_{L^2(\partial M)} = 1$ ) sont telles que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\|u_\lambda\|_{L^2(\partial M_a)} - 1)(\|u_\lambda\|_{L^2(\partial M_1)} - 1) = 0$$

### 3.3. CYLINDRE

Soit  $M$  un cylindre de longueur  $h$  et de rayon unité. Un cylindre n'est qu'un rectangle de dimension  $[h \times 2\pi]$  avec les deux cotés de longueurs  $h$  recollés ensemble. Par séparation de variables  $(x, y) \in [0, 2\pi] \times [0, h]$ , on obtient que les fonctions propres sont

$$\begin{aligned} u_k(x, y) &= f_k(x)g_k(y) \\ &= e^{\pm ikx}(A_k e^{ky} + B_k e^{-ky}) \text{ pour } k \neq 0 \end{aligned}$$

Pour  $k = 0$ , les deux fonctions propres associées à la valeur propres 0 sont  $A_0$  et  $B_0 y$ . Pour  $k > 0$ , on détermine les valeurs des constantes  $A_k$ ,  $B_k$  et  $\lambda_k$  avec la condition de Steklov.

$$\begin{aligned} -g'_k(0) &= \lambda_k g(0) & g'_k(h) &= \lambda_k g(h) \\ -A_k k + B_k &= \lambda_k (A_k + B_k) & k A_k e^{kh} - k e^{-kh} &= \lambda_k (A_k e^{kh} + B_k e^{-h}) \end{aligned}$$

On obtient deux solutions. Les valeurs propres sont de la forme

$$\begin{aligned} \lambda_{1,k} &= \frac{k(e^{hk} - 1)}{e^{hk} + 1} \approx k \\ \lambda_{2,k} &= \frac{k(e^{hk} + 1)}{e^{hk} - 1} \approx k \end{aligned}$$

et les fonctions propres associées sont

$$\begin{aligned} u_{j,k} &= C_{j,k} \left( \left( \frac{k - \lambda_{j,k}}{k + \lambda_{j,k}} \right) e^{ky} + e^{-ky} \right) e^{\pm ikx} \\ &= \begin{cases} C_{1,k} \left( e^{k(y-h)} + e^{-ky} \right) e^{\pm ikx} & j = 1 \\ C_{2,k} \left( -e^{k(y-h)} + e^{-ky} \right) e^{\pm ikx} & j = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

où  $C_{j,k}$  est une constante de normalisation. On veut calculer les normes des fonctions propres sur chacune des deux composantes connexes de la frontière. Les fonctions sont symétriques ou antisymétriques par rapport à l'axe  $y = h/2$ , c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} u_{1,k}(x, y) &= u_{1,k}(x, h - y) \\ u_{2,k}(x, y) &= -u_{2,k}(x, h - y). \end{aligned}$$

Ainsi, les fonctions propres ont **exactement** les mêmes normes sur chacune des composantes connexes de la frontière du cylindre. Dans le cas du cylindre, les deux composantes de la frontière sont de même longueur et, asymptotiquement, les fonctions propres ne se concentrent pas exclusivement sur une composantes. Cet exemple nous permet de conclure qu'il existe des surfaces ayant des fonctions

propres qui ne se concentrent pas sur une composante connexe de la frontière.

**Remarque.** *Il existe des surfaces connexes bornées avec une frontière lisse ayant des fonctions propres qui se concentrent sur plus d'une seule composante de la frontière.*

### 3.4. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Les deux exemples précédents nous ont fait remarquer que, pour l'anneau et le cylindre, deux surfaces riemanniennes avec une frontière lisse formée de deux composantes connexes, les fonctions propres avaient une concentration particulière sur les composantes. En effet, dans le premier cas, les fonctions propres de l'anneau (composantes connexes de longueurs différentes) se concentrent asymptotiquement autour d'une seule composante connexe alors que dans le second cas, les fonctions propres du cylindre (composantes connexes de mêmes longueurs) se concentrent également sur les deux composantes connexes.

J'ai voulu vérifier cette hypothèse concernant la concentration des fonctions propres sur les composantes connexes de la frontière pour des surfaces riemanniennes plus complexes que l'anneau ou le cylindre. J'ai donc procédé à des simulations numériques avec le programme Free Fem ++.

#### 3.4.1. Discrétisation du problème

On commence par construire notre domaine en triangle. On forme la bordure du domaine avec un nombre fini de points et le logiciel FreeFem+ construit l'intérieur du domaine par triangulation.

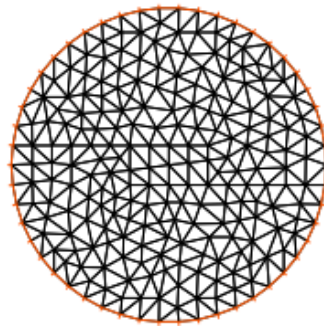


FIGURE 3.1. Triangulation du cercle avec 50 points sur la frontière[**H**]

Dans le solveur, les fonctions analysées sont des combinaisons linéaires de fonctions de base. Il y a autant de fonctions de base que de sommets dans la triangulation du domaine. Sur un sommet  $i$  de la triangulation, la fonction de base  $f_i$  vaut 1 et, sur les sommets adjacents, elle est nulle. Il existe plusieurs types de fonctions de base, mais dans notre cas, pour avoir une dérivée seconde non toujours nulle, nous avons choisi des fonctions de base quadratiques.

### 3.4.2. Forme variationnelle

La forme variationnelle est une autre façon de représenter le problème de Steklov. Remarquons que si  $u \in C^\infty(M)$  est une fonction propre de Steklov de la variété  $M$ , c'est-à-dire  $\Delta u = 0$  et  $\partial_\nu u|_{\partial M} = \lambda u$ , alors, pour n'importe quelle fonction  $v \in C^1(M)$  par la formule de Green[**G**], on a

$$\int_M \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_{\partial M} uv. \quad (3.4.1)$$

À l'inverse, s'il existe une fonction  $u$ , telle que pour toute fonction  $v \in C^\infty(M)$ , le ratio suivant est constant,

$$R(u, v) = \frac{\int_M \nabla u \cdot \nabla v}{\int_{\partial M} uv}$$

alors  $u$  est une fonction propre de Steklov. Numériquement, le solveur cherche une paire  $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times C(M)$  qui respecte l'équation 3.4.1 pour tout  $v$ [**H**]. Nous savons que les valeurs propres sont positives. On indique donc au solveur de commencer à  $\lambda = 0$  et à chaque itération, il vérifie si c'est une valeur propre en testant pour toutes les combinaisons linéaires des fonctions de bases et ce, jusqu'à ce que le solveur ait trouvé le nombre de valeurs et fonctions propres demandé.

### 3.4.3. Transformations conformes

Programmer la frontière d'un domaine quelconque peut être difficile. Les transformations conformes nous permettent de résoudre ce problème.

**Proposition 3.1.** [**HS**] *Pour toute surface  $M$  de genre 0 avec une frontière composée d'un nombre fini de composantes connexes, il existe  $f : D \rightarrow M$ , une fonction conforme, où  $D$  est le disque unité où on a retiré un nombre fini de disques disjoints de son intérieur. De plus,  $D$  est unique à une transformation de Möbius près.*

Ainsi, on peut ramener à un disque n'importe quel domaine borné avec une frontière lisse d'un nombre fini de composantes connexes disque avec des trous circulaire dotée avec une transformation conforme  $f : D \rightarrow \Omega$ , c'est-à-dire une fonction qui préserve les angles. Une transformation conforme entre deux domaines planaires peut être vue comme une fonction complexe. On connaît l'équivalence [O]

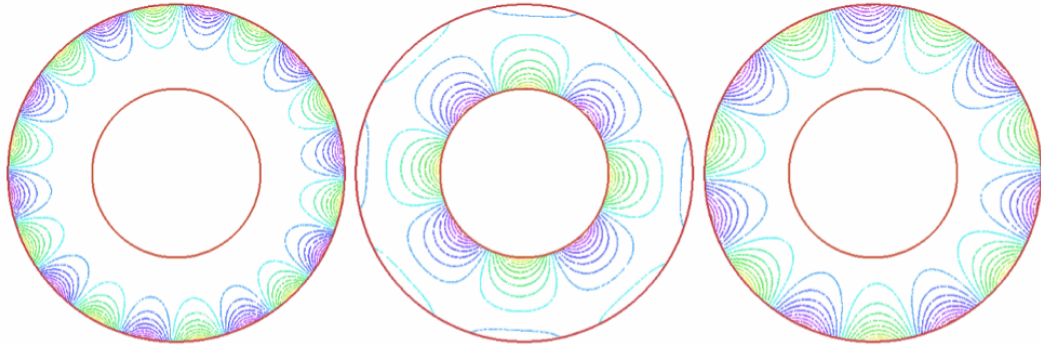
$f : D \rightarrow \mathbb{C}$  est conforme.  $\iff f$  est holomorphe sur  $D$  et  $f'(z) \neq 0 \forall z \in D$

Soit  $u_i : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , et  $f : D \rightarrow \Omega$ , une transformation conforme. Le quotient de Rayleigh pour le domaine  $\Omega$  peut être ramené à un quotient sur l'anneau  $D$ .

$$\begin{aligned} R(u_1, u_2) &= \frac{\int_{\Omega} \nabla u_1(w) \cdot \nabla u_2(w) dw}{\int_{\partial\Omega} u_1(w) u_2(w) dw} \\ &= \frac{\int_D \nabla(u_1 \circ f(z)) \cdot \nabla(u_2 \circ f(z)) dz}{\int_{\partial D} (u_1 \circ f(z))(u_2 \circ f(z)) |f'(z)| dz} \\ &= \frac{\int_D \nabla v_1(z) \cdot \nabla v_2(z) dz}{\int_{\partial D} v_1(z) v_2(z) |f'(z)| dz} \end{aligned}$$

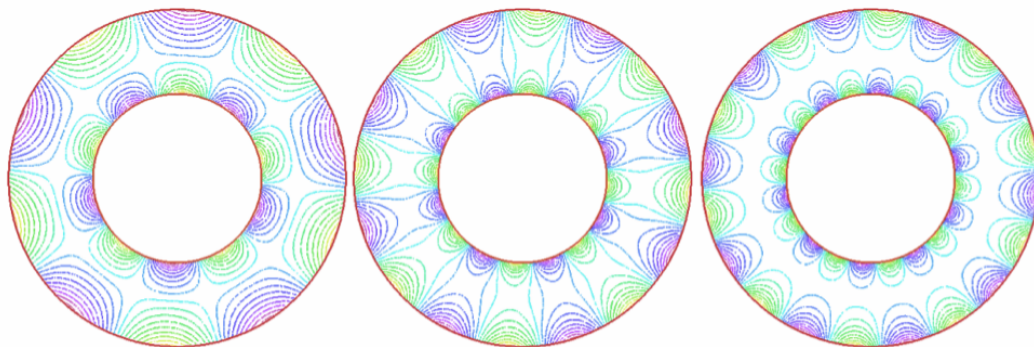
### 3.4.4. Exemples

Dans l'introduction, nous avons présenté deux exemples de fonctions propres obtenues par simulation numérique. Pour les exemples suivants, les transformations et les longueurs des composantes de la frontière sont inscrites sous les figures à titre indicatif.



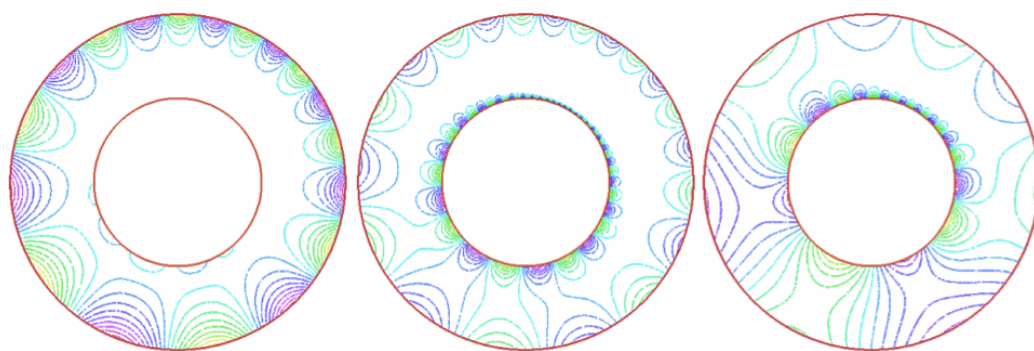
Transformation :  $f(z) = z$  (métrique standard)

Longueur des frontières :  $2\pi$  et  $\pi$ .



Transformation :  $f(z) = \log z$  (cylindre)

Longueur des frontières :  $2\pi$  et  $2\pi$



Transformation :  $f(z) = \frac{(0.1-0.3i)z+0.1}{(1+0.5i)z-0.3i}$

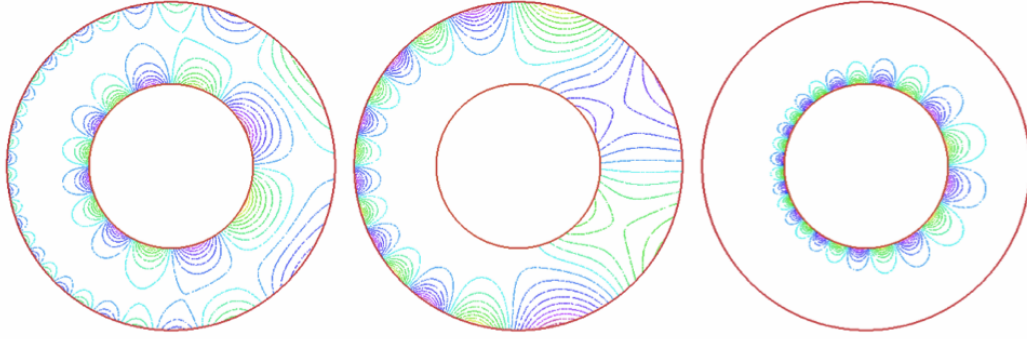
Longueur des frontières  $\approx 1.12$  et  $2.91$



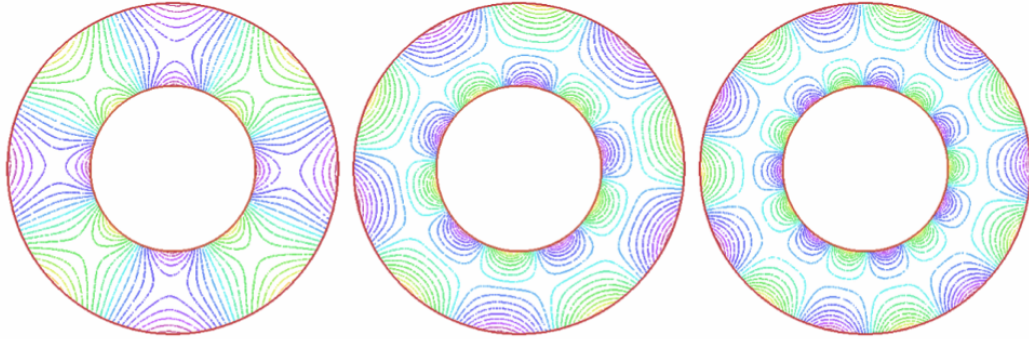
Transformation :  $f(z) = \log \sin z$

Longueur des frontières  $\approx 4.03$  et  $5.75$





Transformation :  $f(z) = e^{-z}$   
 Longueur des frontières  $\approx 7.95$  et  $3.34$



Transformation :  $f(z) = \frac{3}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi z}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)$   
 Longueur des frontières :  $\pi$  et  $\pi$



Transformation :  $f(z) = z$   
 Longueurs des frontières :  $2\pi$ ,  $2\pi/5$  et  $2\pi/5$

FIGURE 3.2. Courbes de niveau de fonctions propres de Steklov

De ces exemples, on remarque seules les fonctions propres des surfaces ayant des composantes de la frontière de mêmes longueurs se concentrent sur plus d'une composante de la frontière.



# Chapitre 4

---

## PREUVES DES THÉORÈMES 1 ET 3

Nous avons conclu le chapitre 2 sur un corollaire important (2.13). Ce dernier énonce que si deux surfaces sont identiques dans un voisinage de leur frontière alors les opérateurs de Steklov qui leur sont associés ne diffèrent que par un opérateur régularisant. La figure suivante présente un exemple d'une telle paire de surfaces ( $M$  à gauche et  $N$  à droite).

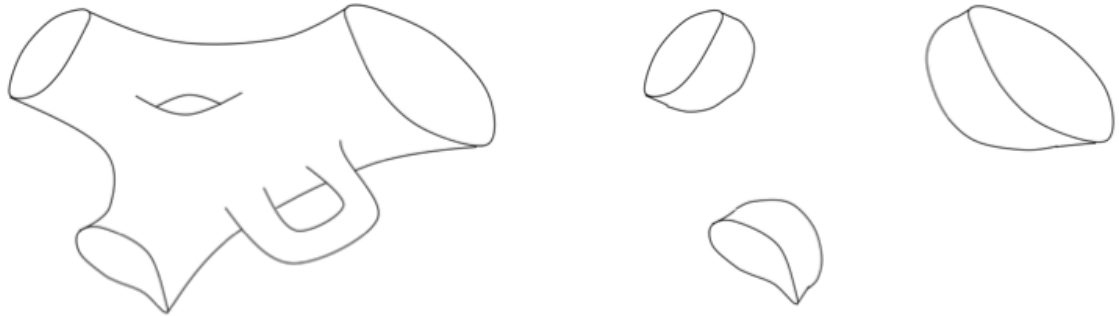


FIGURE 4.1. Surfaces identiques dans un voisinage des frontières

Pour  $N$ , la surface à droite, étant donné qu'elle n'est pas simplement connexe, son spectre est l'union des valeurs propres des 3 surfaces connexes. De plus, les fonctions propres seront non-nulles sur un seul des morceaux. Il est donc clair que les fonctions propres se concentrent sur une seule des composantes connexes de la frontière. La question qui reste à résoudre est de savoir si cette propriété peut-être transférer à  $M$  sachant que

$$P_M - P_N = R \in \Psi^{-\infty}(\partial M)$$

Pour analyser les liens qui existent entre les valeurs propres et les fonctions propres des opérateurs de Steklov des deux surfaces ci-dessus, il nous faut comprendre l'effet de l'opérateur régularisant  $R$  sur les fonctions et valeurs propres de Steklov de  $M$  et  $N$ .

Le chapitre débutera donc en exposant 2 lemmes qui expliquent justement le comportement de la perturbation  $R$  sur les fonctions propres et sur les valeurs propres. Par la suite seront présentées les preuves des théorèmes 1 et 3.

#### 4.1. LEMMES IMPORTANTS

Les preuves des deux théorèmes sont basées sur deux lemmes importants qui traitent des propriétés des opérateurs pseudo-différentiels régularisants. Les preuves sont inspirées de [GPPS].

**Lemme 4.1.** *Soit  $M$  une variété compacte de dimension  $n$ . Soit  $P$  et  $Q$  des opérateurs pseudo-différentiels elliptiques, auto-adjoints, positifs d'ordre  $m > 0$  tel que  $P - Q \in \Psi^{-\infty}(M)$ . Soit  $\phi_k$  les fonctions propres de  $P$ . Si  $f \in L^2(M)$  est tel que  $f \perp (\text{Span}\{\phi_1, \dots, \phi_k\})$  et  $\|f\|_{L^2(M)} = 1$ , alors*

$$\|(P - Q)f\|_{L^2(M)} = O(k^{-\infty}).$$

DÉMONSTRATION. Notons  $\lambda_k$  les valeurs propres de  $P$  et  $S = P - Q \in \Psi^{-\infty}(M)$ .

$$\begin{aligned} \|Sf\|_{L^2} &= \left\| \sum_{j>k} \langle f, \phi_j \rangle S\phi_j \right\|_{L^2(M)} \\ &\leq \sum_{j>k} |\langle f, \phi_j \rangle| \|S\phi_j\|_{L^2(M)} \\ &= \sum_{j>k} |\langle f, \phi_j \rangle| \frac{\|SP^p\phi_j\|_{L^2(M)}}{\lambda_j^p} \\ &\leq \lambda_k^{-p} \sum_{j>k} |\langle f, \phi_j \rangle| \|SP^p\phi_j\|_{L^2(M)} \\ &\leq \lambda_k^{-p} \left( \sum_{j>k} |\langle f, \phi_j \rangle|^2 \sum_{j>k} \|SP^p\phi_j\|_{L^2(M)}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \lambda_k^{-p} \left( \sum_{j>k} \|SP^p\phi_j\|_{L^2(M)}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie, car  $\sum |\langle f, \phi_j \rangle|^2 = \|f\|_{L^2(M)}^2 = 1$ . Utilisons l'hypothèse principale :  $S \in \Psi^{-\infty}$ . Cette hypothèse implique  $S : H^s(M) \rightarrow$

$H^{-\infty}(M)$  et donc que  $SP^{p+N} : H^s(M) \rightarrow H^{-\infty}(M)$ . L'opérateur est donc borné : il existe  $K_{p,N}$  tel que

$$\|SP^{p+N}\phi_j\|_{L^2} \leq K_{p,N}$$

$$\begin{aligned} \|Sf\|_{L^2} &\leq \lambda_k^{-p} \left( \sum_{j \in \mathbb{N}} \|SP^p\phi_j\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \lambda_k^{-p} \left( \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j^{-2N} \|SP^{p+N}\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \lambda_k^{-p} K_{p,N} \left( \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j^{-2N} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Par les asymptotiques de la loi de Weyl, les valeurs propres de  $P$  sont telles que  $\lambda_k \sim k^{m/n}$  [Z]. Fixons  $N$  suffisamment grand pour la série  $\sum \lambda_j^{-2N} \sim \sum k^{-2Nm/n}$  converge. Ainsi, il existe  $K'_p$  tel que

$$\|Sf\|_{L^2} \leq K'_p \lambda_k^{-p}$$

Toujours par les asymptotiques de Weyl, on a que  $\lambda_k(P) \sim k^{n/m}$  et donc qu'il existe une constante  $C_p$  telle que

$$\begin{aligned} \|Sf\|_{L^2(M)} &\leq C_p k^{-pm/n} \\ \|(P - Q)f\|_{L^2(M)} &= O(k^{-\infty}) \end{aligned}$$

□

Remarque :  $P$  et  $Q$  étant interchangeable, le résultat reste pour les fonctions propres de  $Q$ .

**Lemme 4.2.** *Soit  $M$  une variété compacte de dimension  $n$ . Soit  $P$  et  $Q$  des opérateurs pseudo-différentiels elliptiques, auto-adjoints, positifs d'ordre  $m > 0$ . Si  $P - Q \in \Psi^{-\infty}(M)$ , alors les valeurs propres de  $P$  et de  $Q$  satisfont à*

$$\lambda_k(P) - \lambda_k(Q) = \mathcal{O}(k^{-\infty}).$$

DÉMONSTRATION. Soit  $\phi_k$  les fonctions propres de  $P$  et soit  $E_k = \text{Span}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k\} \subset L^2(M)$ . Notons  $S = Q - P \in \Psi^{-\infty}(M)$ .

$$\lambda_{k+1}(Q) = \lambda_{k+1}(S + P) = \max_{\substack{V \subset L^2(M) \\ \dim V = k}} \min_{f \perp V, \|f\|=1} \langle (S + P)f, f \rangle$$

$$\begin{aligned}
&\geq \min_{f \perp E_k, \|f\|=1} \langle (S + P)f, f \rangle \\
&\geq \min_{f \perp E_k, \|f\|=1} \langle Pf, f \rangle - \max_{f \perp E_k, \|f\|=1} |\langle Sf, f \rangle| \\
&= \lambda_{k+1}(P) - \max_{f \perp E_k, \|f\|=1} \|Sf\|_{L^2(M)}
\end{aligned}$$

On a donc que  $\lambda_{k+1}(P) - \lambda_{k+1}(Q) \leq \max_{f \perp E_k, \|f\|=1} \|Sf\|_{L^2(M)}$ . Ainsi, par le lemme 4.1, on a que

$$\lambda_{k+1}(P) - \lambda_{k+1}(Q) = \mathcal{O}(k^{-\infty})$$

□

## 4.2. PREUVE DU THÉORÈME 1

**Théorème 1.** [GPPS] *Soit  $M$  une surface riemannienne bornée avec une frontière lisse composée de  $K$  composantes connexes respectivement de longueur  $\ell_1, \dots, \ell_K$ . Alors les valeurs propres de Steklov de  $M$  satisfont de manière asymptotique à*

$$\lambda_j = \left\{ S\left(\frac{2\pi}{\ell_1}, \frac{2\pi}{\ell_2}, \dots, \frac{2\pi}{\ell_K}\right) \right\}_j + \mathcal{O}(j^{-\infty})$$

où l'ensemble  $S(a_1, a_2, \dots, a_n) = S(a_1) \cup \dots \cup S(a_n)$  avec l'union où on garde les multiplicités et avec  $S(a) = \{a | m| : m \in \mathbb{Z}\}$ .

**DÉMONSTRATION.** Soit  $\partial M_1, \dots, \partial M_K$  les  $K$  composantes connexes de la frontière. Découpons un voisinage de ces frontières et recollons un bonnet sur chacun des voisinages des frontières pour former  $K$  surfaces simplement connexes.



FIGURE 4.2. Construction de la surface  $N$

Notons  $N = N_1 \cup \dots \cup N_K$  la variété en résultant. Par le corollaire 2.13, on sait que  $P_M - P_N \in \Psi^{-\infty}(\partial M)$ . Pour chacune des surfaces simplement connexes  $N_k$  composant  $N$ , il existe une transformation conforme  $f : N_k \rightarrow D_k$  où  $D_k$  est un disque de circonférence  $\ell_k$ . Par le travail de Rozemblyum[**R**], on sait que

$$P_{N_k} - f_* P_{D_k} f^* \in \Psi^{-\infty}(\partial N_k).$$

Soit  $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$ , une union de disques ayant respectivement des circonférences de  $\ell_1, \dots, \ell_K$ . On a donc que  $P_N - f_* P_D f^* \in \Psi^{-\infty}(\partial N)$ , où  $f : N \rightarrow D$  est une transformation conforme entre chaque  $N_k$  et  $D_k$ . Ainsi,

$$P_M - f_* P_D f^* \in \Psi^{-\infty}(\partial M).$$

Au chapitre 3, nous avons obtenu que les valeurs propres d'un disque de circonférence  $\ell$ , sont  $\{0, \frac{2\pi}{\ell}, \frac{2\pi}{\ell}, \frac{4\pi}{\ell}, \frac{4\pi}{\ell}, \frac{6\pi}{\ell}, \frac{6\pi}{\ell}, \dots\}$ . Ainsi, le spectre de Steklov pour  $D$ , une union de  $K$  disques est

$$S\left(\frac{2\pi}{\ell_1}, \frac{2\pi}{\ell_2}, \dots, \frac{2\pi}{\ell_K}\right)$$

où l'ensemble  $S(a_1, \dots, a_n) = S(a_1) \cup \dots \cup S(a_n)$  avec l'union où on garde les multiplicités et avec  $S(a) = \{a | m| : m \in \mathbb{Z}\}$ .

Le lemme 4.1 permet de dire qu'asymptotiquement le spectre de Steklov ne dépend que des longueurs de composantes connexes de la frontière et qu'il est caractérisé comme suit :

$$\lambda_n = S\left(\frac{2\pi}{\ell_1}, \frac{2\pi}{\ell_2}, \dots, \frac{2\pi}{\ell_K}\right)_n + O(n^{-\infty})$$

□

### 4.3. PREUVE DU THÉORÈME 3

**Théorème 3.** *Soit  $M$  une surface riemannienne ayant une frontière lisse ayant  $K$  composantes connexes,  $\partial M = \partial M_1 \cup \dots \cup \partial M_K$ . Si les longueurs des composantes connexes de la frontière  $\ell_j = |\partial M_j|$  sont telles qu'aucun des rapports  $\ell_j/\ell_i$  entre les longueurs des composantes connexes de la frontière n'est finement approximable par une suite rationnelle<sup>1</sup>, alors les fonctions normalisées de Steklov  $u_n$  se concentrent autour seule d'une composante de la frontière, c'est-à-dire, pour chaque  $n$ , il existe une composante  $\partial M_{k_n}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L^2(\partial M_{k_n})} = 1$ .*

**DÉMONSTRATION.** Construisons une variété  $N$  comme dans la preuve du théorème 1, on découpe un voisinage des frontières de  $M$  et on recolle un bonnet sur chacun des voisinages des frontières pour former  $K$  surfaces simplement connexes

---

1. On dit qu'un nombre  $x$  est finement approximable par une suite rationnelle si, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$  tel que  $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{(q_n)^n}$

(voir la figure 4.2).

Notons  $N = N_1 \cup \dots \cup N_K$  la variété en résultant où  $|\partial N_k| = |\partial M_k| = \ell_k$ . Par le corollaire 2.13, on sait que  $P_M - P_N \in \Psi^{-\infty}(\partial M)$ . Soit  $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$ , une union de disques ayant respectivement circonférence de  $\ell_1, \dots, \ell_K$ . On a donc que  $P_N - f_* P_D f^* \in \Psi^{-\infty}(\partial N)$ , où  $f : N \rightarrow D$  est une transformation conforme entre chaque  $N_k$  et  $D_k$ . Ainsi,

$$P_M - f_* P_D f^* \in \Psi^{-\infty}(\partial M).$$

Notons  $\lambda_n(M)$  et  $u_n$  les valeurs et fonctions propres orthonormées de  $P_M$  et  $\lambda_j(D)$  et  $v_j$  les valeurs et fonctions propres de  $P_D$  normées de façon à ce que  $\{v_j \circ f\}$  soit une base orthonormale de  $\partial M$ .

Nous pouvons projeter les fonctions propres de  $P_M$  sur celles de  $f_* P_D f^*$  et inversement. Toutes les deux forment une base orthonormale de  $L^2(\partial M)$ . On a donc les égalités suivantes.

$$u_n = \sum_j a_{n,j} v_j \circ f \quad v_j \circ f = \sum_n \overline{a_{n,j}} u_n$$

où les coefficients de Fourier valent  $a_{k,j} = \langle u_k, v_j \rangle_{\partial M}$ .

$$\begin{aligned} R u_n = (P_M - f_* P_D f^*) u_n &= P_M u_n - f_* P_D f^* \left( \sum_j a_{n,j} v_j \circ f \right) \\ &= \lambda_n(M) u_n - \left( \sum_j a_{n,j} \lambda_j(D) v_j \circ f \right) \\ &= \lambda_n(M) \left( \sum_j a_{n,j} v_j \circ f \right) - \left( \sum_j a_{n,j} \lambda_j(D) v_j \circ f \right) \\ &= \sum_j a_{n,j} (\lambda_n(M) - \lambda_j(D)) v_j \circ f \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 1, on obtient

$$\|R u_n\|^2 = \sum_j |a_{n,j}|^2 (\lambda_n(M) - \lambda_j(D))^2 = O(n^{-\infty}) \quad (4.3.1)$$



On veut borner inférieurement la différence  $|\lambda_n(M) - \lambda_j(D)|$ , afin de pouvoir obtenir une borne sur les coefficients  $a_{n,j}$ . Par le théorème 1, nous avons que

$$\lambda_n(M) = S\left(\frac{2\pi}{\ell_1}, \frac{2\pi}{\ell_2}, \dots, \frac{2\pi}{\ell_K}\right)_n + O(n^{-\infty}).$$

Ainsi, il y a une bijection entre les ensembles  $\{\lambda_n(M) : n \in \mathbb{N}\}$  et  $(m_n, k_n) \in \mathbb{Z} \times \{1, \dots, K\}$  tel que

$$\lambda_n(M) = \frac{2\pi|m_n|}{\ell_{k_n}} + O(n^{-\infty}).$$

et, similairement pour  $\lambda_j(D)$ , il existe une bijection entre le spectre et l'ensemble  $(m_j, k_j) \in \mathbb{Z} \times \{1, \dots, K\}$  tel que

$$\lambda_j(D) = \frac{2\pi|m_j|}{\ell_{k_j}}.$$

On a donc que

$$|\lambda_n(M) - \lambda_j(D)| = 2\pi \left| \frac{|m_n|}{\ell_{k_n}} - \frac{|m_j|}{\ell_{k_j}} \right| + O(n^{-\infty}).$$

Puisque que les rapports entre les longueurs des composantes connexes de la frontière ne sont pas finement approximables par une suite rationnelle, il existe  $N$  tel que pour tout  $1 \leq k < \bar{k} \leq K$  et pour tout  $p, q \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\left| \frac{\ell_{\bar{k}}}{\ell_k} - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^N} \quad (4.3.2)$$

- Si  $k_n = k_j$  et  $|m_n| \neq |m_j|$ , on a

$$|\lambda_n(M) - \lambda_j(D)| > \frac{2\pi}{\ell_{k_j}} + O(n^{-\infty}).$$

- Si  $k_n \neq k_j$ , par 4.3.2, on a

$$\begin{aligned} |\lambda_n(M) - \lambda_j(D)| &= 2\pi \frac{m_n}{\ell_{k_j}} \left| \frac{\ell_{k_n}}{\ell_{k_j}} - \frac{|m_j|}{|m_n|} \right| + O(n^{-\infty}) \\ &> \frac{2\pi}{|m_n|^N} + O(n^{-\infty}). \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $n$  suffisamment grand tel que  $(k_n, |m_n|) \neq (k_j, |m_j|)$ , il existe  $A > 0$  tel que

$$|\lambda_n(M) - \lambda_j(D)| > A|m_n|^{-N}. \quad (4.3.3)$$

De l'équation 4.3.1, on obtient les bornes suivantes

$$\begin{aligned} \sum_j |a_{n,j}|^2 |\lambda_n - \lambda_j(D)|^2 &= O(n^{-\infty}) \\ \Rightarrow \sum_{\substack{j \\ k_j \neq k_n, |m_j| \neq |m_n|}} |a_{n,j}|^2 |\lambda_n(N) - \lambda_j(D)|^2 &= O(n^{-\infty}) \end{aligned}$$

et en jumelant le tout avec l'équation 4.3.3, on a

$$\sum_{\substack{j \\ k_n \neq k, |m_n| \neq |m|}} |a_{n,j}|^2 = \frac{1}{A} |m_n|^N O(n^{-\infty}). \quad (4.3.4)$$

Par le théorème 1, on sait qu'il existe une constante  $B$  qui dépend des longueurs  $\ell_1, \dots, \ell_K$  telles que

$$\frac{1}{2} |m_n| \leq n \leq B |m_n|. \quad (4.3.5)$$

On obtient ainsi, par 4.3.4 et 4.3.5

$$\sum_{\substack{j \\ k_j \neq k_n, |m_j| \neq |m_n|}} |a_{n,j}|^2 = O(n^{-\infty}) \quad (4.3.6)$$

Prenons une fonction propre quelconque  $u_n$  à laquelle est associée la paire  $(k_n, m_n) \in \{1, \dots, K\} \times \mathbb{Z}$ . Rappelons-nous que les fonctions propres de  $v_j \circ f$  sont non-nulles sur une seule composante de la frontière,  $\partial M_{k_j}$ .

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_j a_{n,j} (v_j \circ f) \\ \|u_n\|_{L^2(\partial M_{k_n})} &= \sum_{\substack{j \\ k_j = k_n}} |a_{n,j}|^2 = 1 - \sum_{\substack{j \\ k_j \neq k_n}} |a_{n,j}|^2 = 1 - O(n^{-\infty}) \\ \|u_n\|_{L^2(\partial M_{k_i})} &= \sum_{\substack{j \\ k_j \neq k_n}} |a_{n,j}|^2 = O(n^{-\infty}) \quad \text{où } k_i \neq k_n. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction  $u_n$  se concentre seulement sur la composante  $\partial M_{k_n}$  de la frontière de la surface.  $\square$

Dans cette preuve, la propriété sur rapports entre les longueurs frontière est essentielle pour arriver à montrer que les fonctions propres ne se concentrent que sur une composante connexe de la frontière. Cependant, jusqu'à présent, il n'existe aucun exemple de surfaces avec des composantes de la frontière de différentes longueurs ayant des fonctions propres qui ne concentrent sur plus d'une composante. Il serait intéressant de voir si un tel exemple existe, ou si, inversement, il est possible de retirer cette hypothèse du théorème 3.

# Bibliographie

---

- [E] Egorov, Y et Schulze, B-W. (1997) *Pseudo-Differential Operators, Singularities, Applications*. Basel : Birkhäuser.
- [G] Green Formulas. *Encyclopedia of Mathematics*. En ligne : [http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Green\\_formulas&oldid=28207](http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Green_formulas&oldid=28207)
- [Ga] Gantumur, T. (2013) *Spectral Properties of the Laplacian on Bounded Domain*. En ligne : <http://www.math.mcgill.ca/gantumur/math580f13/laplacian.pdf>
- [GPPS] Girouard A., Parnowski L., Polterovich I. et Sher D. (2014) *The Steklov spectrum of surfaces : asymptotics and invariants* Math. Proc. Camb Philos. Soc, 157 :379-389. <http://www.homepages.ucl.ac.uk/~ucahleP/Papers/gpps.pdf>
- [GT] Galkowski, J. et Toth J.(2016) *Pointwise bounds for Steklov eigenfunction* En ligne : <https://arxiv.org/pdf/1611.05363.pdf>
- [H] Hetch, F. (2017) FreeFem++. En ligne. <http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf>.
- [HS] He, Z et Schramm O. (1993) *Fixed Points, Koebe uniformization and circle packings*. Annals of Mathematics, 137 : 369-406. <https://www.jstor.org/stable/pdf/2946541.pdf>
- [Ka] Kato, T. (1966). *Perturbation theory for linear operators*. New York : Springer-Verlag.
- [K] Kuznetsov, N et autres. (2014) *The Legacy of Vladimir Andreevich Steklov*. En ligne : <http://www.ams.org/notices/201401/rnoti-p9.pdf>
- [LU] Lee J. et Uhlmann, G. (1989) *Determining Anisotropic Real-Analytic Conductivities by Boundary Measurements*. Communications on Pure and Applied Mathematics. 42 :1097-1112.
- [M] Miklavčič, M. (1998) *Applied Functional Analysis and Partial Differential Equations*. New Jersey : World scientific.
- [Mo] Möllers, J. (2008) *The Dirichlet-to-Neumann map as a Pseudodifferential Operator*. Université de Paderborn. En ligne : [https://www2.math.uni-paderborn.de/fileadmin/Mathematik/People/moellers/diploma\\_thesis.pdf](https://www2.math.uni-paderborn.de/fileadmin/Mathematik/People/moellers/diploma_thesis.pdf)
- [O] Olver, P. (2017) *Complex Analysis and Conformal Mapping* University of Minnesota. En ligne : [http://www-users.math.umn.edu/olver/ln\\_/cml.pdf](http://www-users.math.umn.edu/olver/ln_/cml.pdf)

- [PS] Polterovich I. et Sher D. (2015) *Heat invariants of the Steklov problem* Journal of geometry and analysis. 2 :924-950.
- [PST] Polterovich, I. Sher, D. and Toth, J. (2016) *Nodal lenght of Steklov eigenfunctions on real-analytic Riemannian surfaces*. Preprint. <http://www.dms.umontreal.ca/~iossif/steklovnodal.pdf>
- [S] Stekloff, W. (1899) *Sur l'existence des fonctions fondamentales*, C. R. Acad. Sci. Paris 128, p. 808-810.
- [S2] Stekloff, W. (1902) *Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématiques (suite et fin)*. Annales scientifiques de l'ANS. 19 : 455-490.
- [So] Sobolev, S. L. (1964) *Partial differential equations of mathematical physics*. Oxford : Pergamon press.
- [T] Taylor, M. (2011). *Partial Differential Equations I : Basic Theory* (2e éd.). New York : Springer-Verlag.
- [T2] Taylor, M. (2011) *Partial Differential Equations II : Qualitative Studies of Linear Equations* (2e éd.). New York : Springer-Verlag.
- [Tr] Treves, F. (1980) *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*. Plenum Press : New York.
- [U] Uhlmann, G. (2009) *Electrical impedance tomography and Calderon's problem*. Inverse problems. 25-12. <https://sites.math.washington.edu/~gunther/publications/Papers/calderoniprevised.pdf>
- [W] Renardy, M et Rogers C. (2004) *An introduction to partial differentiel equations*. New York : Springer-Verlag.
- [Z] Zielinkin, L. (1999) *Sharp Spectral Asymptotics and Weyl Formula for Elliptic Operators with Non-smooth Coefficients* Mathematical Physics, Analysis and Geometry 2 : 291-321.